[1]

Kivonat. Adott a síkon vagy a térben egy véges ponthalmaz. Célunk olyan hálózat keresése, amely összeköti a halmaz pontjait és a legrövidebb összhosszal rendelkezik. A fő eredményben olyan feltételeket adunk meg, amelyekkel egy legrövidebb hálózat szükségképpen rendelkezik. A fizikai elveken alapuló tárgyalást néhány alkalmazással és történeti adalékkal egészítjük ki.

1. Bevezetés

A geometriai szélsőérték-problémák tudománytörténeti szerepe igen jelentős. Számos esetben előfordult, hogy egy-egy önmagában is érdekes feladat önálló elméletté terebélyesedett, új fejezetet nyitva ezáltal a matematikai kutatásokban. Talán a leghíresebb (és egyik legfontosabb) példa erre az izoperimetrikus probléma. Ebben a cikkben egy másik, talán kevésbé közismert problémakört szeretnénk bemutatni a véges ponthalmazok legrövidebb hálózatához kapcsolódóan. Idézzük föl elsőként a KöMaL **Gy. 1591.** számú feladatát az 1975. szeptemberi számból (kicsit korszerűbb köntösben):

Négy mérőállomás áll egy 10 km *oldalú négyzet négy sarkában. Az állomásokat optikai kábellel kívánjuk összekötni úgy, hogy bármelyikből bármelyikbe lehessen jelet küldeni. A rendelkezésre álló pénz* 27,5 km *hosszú hálózat kiépítéséhez elegendő. Megvalósítható-e a tervünk?*

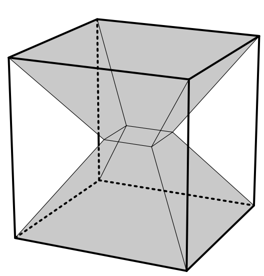
A feladat nehezített változatban így szól: *Meghatározandó a* 10 km *oldalhosszúságú négyzet csúcsaiban elhelyezkedő négy mérőállomást összekötő legrövidebb hálózat.*

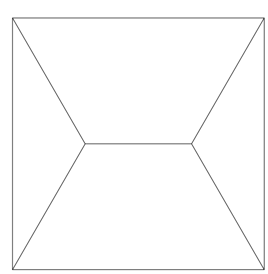
Mindkét esetben az elsődleges nehézség, hogy nincs semmiféle támpont a hálózat szerkezetét illetően. Elsőként meg kell sejteni, hogy mi lehet a keresett struktúra. Kezdeti próbálkozásként gondolhatunk a teljes kerületre. Ennél rövidebb megoldást nyerhetünk egy él kihagyásával, hiszen az összefüggőségi feltétel így is érvényben marad. Még gazdaságosabb, ha a két átlót választjuk, beiktatva egy csomópontot, mégpedig az átlók metszéspontját. De vajon a legjobbat találtuk-e meg?

A válasz keresésekor fizikai intuíciók mentén indulunk el. Ugyanez a megközelítés olvasható Pólya György [16] vagy Hugo Steinhaus [18] kiváló könyvében, vagy Herczeg János és Reiman István nagyszerű írásaiban [10], [11]. Kiderül, hogy a fizikai elvek mindegyike matematikai jelentéssel ruházható föl, hatékony megközelítést biztosít, és egy igen általános tételhez vezet. Eközben körbejárunk egy klasszikus geometriai szélsőérték-feladatot. A cikket a témakör történeti áttekintésével zárjuk, kitérve a fölhasznált szakirodalom ismertetésére.

2. Fizikai furfangok

Legyünk merészek: vizsgáljuk a **Gy. 1591.** feladat térbeli megfelelőjét! A négyzet szerepét ekkor átveszi a kocka, a csúcsokét a kocka élhálózata. Kérdés: melyik az a minimális felszínű felület, amely az élekre feszül? Készítsük el a kocka élhálózatát drótból, és mártsuk szappanos vízbe. A szappanhártya az energiaminimum elve szerint rendeződik (az *ábrán* egyszerűsítettük a felületeket), és ötletet ad a kétdimenzós elrendeződéshez (topológiai struktúrához):





Vagyis, érdemes próbálkozni két csomópont beiktatásával, melyek egymással, illetve a négyzet két-két csúcsával állnak összeköttetésben. A kérdés csupán a szerkezet (geometriai struktúra), azaz, hogy milyen szög alatt találkoznak az élek a csomópontokban. Vegyük figyelembe, hogy ha egy hálózat minimumot szolgáltat, akkor bármely részlete is minimumot szolgáltat. Pontosabban fogalmazva: ha egy csomópont körül olyan körlapot tekintünk, amely nem tartalmaz további alappontot vagy csomópontot, akkor a körív három metszéspontját is a lehető legrövidebb módon köti össze a hálózat. Ez pedig nem más, mint a vizsgált probléma háromszögekre vonatkozó megfelelője.

Készítsük el a háromszögekre vonatkozó változat modelljét. Fúrjunk három lyukat egy asztal lapjára, melyeken fűzzünk keresztül három valamilyen hosszúságú zsineget. A zsinegek asztallap fölötti részét csomózzuk össze, majd a lelógó végeket terheljük azonos nagyságú súlyokkal. Ezek után hagyjuk szabadon a rendszert. Mit tapasztalunk? (Ezt a kísérleti elrendezést *Torricelli-asztalnak* nevezzük.)

[1] A cikk az OTKA K–111651 számú pályázat támogatásával született.

Miután a rendszer nyugalmi állapotba került, csak helyzeti energiával rendelkezik. Ezt a lehet ő legtakarékosabban valósítja meg: a lelógó súlyok a legmélyebb helyzetbe kerülnek, ezért az asztallap alatti zsinegek összhossza maximális. Ám ekkor az asztallap fölötti részek összhossza minimális. Vagyis, az energiaminimum elve miatt a rendszer éppen a keresett hálózatot modellezi.

Másrészt, a csomópontra ható eredő erő nulla – ennek köszönhető a nyugalmi állapot. A ható erők nagysága azonos, hiszen azonos nagyságú súlyok függnek a lelógó zsinegvégeken. Ezek úgy olthatják ki egymást, ha páronként egyenlő szöget, azaz $2\pi/3$ nagyságút zárnak be egymással. Newton II. törvénye tehát választ ad a szögek nagyságára.

Összefoglalva: három fizikai elv, úgymint a lokalitási elv, az energiaminimum elve és Newton II. törvénye megoldást kínál az eredeti feladatra. A hálózat összhosszát könnyen meghatározhatjuk: egységnégyzetben $1+\sqrt{3}$ az értéke. Áttérve 10 km oldalhosszú négyzetre, kapjuk a **Gy. 1591.** megoldását: mivel $10\big(1+\sqrt{3}\big) < 27{,}5$, ezért a rendelkezésre álló pénzből kiépíthető a hálózat. Egyelőre azonban nyitva marad a feladat erősebb formájában megfogalmazott kérdés. A következő fejezetben erre adunk választ. Közben igen hasznosnak bizonyul majd a három fizikai elv közül a lokalitási elv. Ennek pontos matematikai megfogalmazása: *Minden globális minimum egyben lokális minimum.*

3. Megközelítés matematikus módra

A matematikus szemléletmód egyik jellemzője az általánosságra való törekvés. Ez nem pusztán az eredmények széleskörű alkalmazhatósága miatt fontos: a jól eltalált általánosítás a probléma lényegét tükrözi, s ezért a megoldás kulcsát jelentheti. Legyünk tehát ismét merészek, és tekintsük a következő általánosítást.

Adott a síkon (vagy a térben) egy véges H ponthalmaz. Keressük azt az összefüggő $\mathcal{G}$ gráfot, melynek csúcshalmaza tartalmazza H pontjait és minimális összhosszal rendelkezik.

A továbbiakban H pontjait *alappontoknak,* az eredetileg nem létező, újonnan fölvett segédpontokat *csomópontoknak,* végezetül $\mathcal{G}$ pontjait, vagyis az alappontok és csomópontok egyesítési halmazát *csúcspontoknak* fogjuk nevezni.

Ha már az ígéretes általánosítás kezünkben van, érdemes lehet megvizsgálni annak egy nem triviális speciális esetét. Most is ezt tesszük: szorítkozzunk egyelőre síkbeli, nem elfajuló háromelemű halmazra. Ezt a problémát Fermat-feladatnak nevezik. *Legyen adott a síkban az ABC háromszög; meghatározandó az $AP+BP+CP$ összeg minimuma, ahol P tetszőleges síkbeli pontot jelöl.* Röviden:

$$AP+BP+CP \longmapsto \min(P\in\mathbb{R}^2). \tag{F}$$

A Fermat-feladat megoldását az alábbi három lemma tisztázza. Az első szerint a megoldást jelentő pont a háromszögön belül keresendő; a másik kettő ennek birtokában a helyet is megjelöli annak függvényében, hogy a legnagyobb szög meghaladja-e a kritikus $2\pi/3$ értéket avagy nem. Az előbbit szokás *lebegő,* míg az utóbbit *kötött* esetként említeni. Ezek az elnevezések az előző részben bemutatott Torricelli-asztal fizikai viselkedésére utalnak.

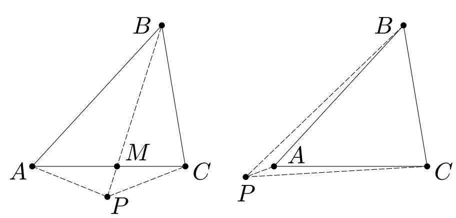
1. lemma. *Az ABC háromszögön kívüli pontok nem megoldásai az* (F) *Fermat-feladatnak.*

Bizonyítás. Tekintsük az AC oldalegyenes által meghatározott azon nyílt félsíkot, mely nem tartalmazza a B csúcsot. E félsíkot a másik két oldal egyenese három (nem korlátos) tartományra bontja. Tegyük fel, hogy P abban a tartományban van, amely a háromszög oldalszakaszával határos. Ekkor a BP szakasz valamely M pontban metszi az AC oldalt, és

$$AP+BP+CP > AC+BP > AC+BM = AM+BM+CM.$$

Tehát P nem lehet megoldása az (F) Fermat-feladatnak. Most tegyük fel, hogy P olyan tartományban van, amely nem oldalszakasszal határos. Föltehető, hogy a P-hez legközelebb az A csúcs helyezkedik el. Mivel $BAC\sphericalangle < \pi$, ezért a PAB és PAC háromszögek egyikében az A tompaszögű csúcs. Föltehető, hogy ez épp a PAC háromszög. Ekkor $AC < PC$, s így

$$AP+BP+CP > AP+BP+CA > AB+AC.$$



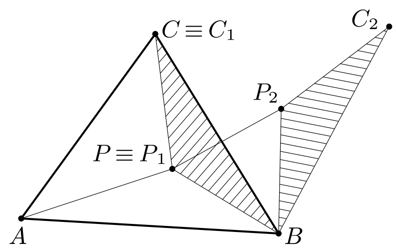
Ezek szerint P most sem megoldása az (F) Fermat-feladatnak. Megismételve ugyanezt az érvelést a háromszög valamennyi oldalegyenesére, a bizonyítandó állítást kapjuk. □

2. lemma. (Kötött eset.) *Ha ABC olyan háromszög, melynek szögei a $2\pi/3$ értéknél kisebbek, akkor az* (F) *Fermat-feladat megoldása a háromszög izogonális pontja, vagyis az a pont, melyből az oldalak azonos szögben látszanak.*

Bizonyítás. Legyen ugyanis P tetszőleges síkbeli pont. Az előző lemma miatt föltehető, hogy P az ABC háromszöghöz tartozik. Forgassuk el a $BPC = BP_1C_1$ háromszöget kifelé $\pi/3$ szögben. Legyen BP_2C_2 az így kapott háromszög. Ekkor BP_1P_2 szabályos háromszög, ezért $P_1P_2 = BP_1$ és $P_1C_1 = P_2C_2$. Tehát

$$AP + BP + CP = AP_1 + BP_1 + C_1P_1 = AP_1 + P_1P_2 + P_2C_2.$$

Nyilván az $AP_1P_2C_2$ töröttvonal hossza legalább akkora, mint az AC_2 szakasz hossza. Ennek köszönhetően P csak akkor szolgáltathat minimumot, ha A, P_1, P_2, C_2 közös egyenesre illeszkednek. Ez azt jelenti, hogy $APC\sphericalangle = 2\pi/3$ szükségképpen fönnáll.

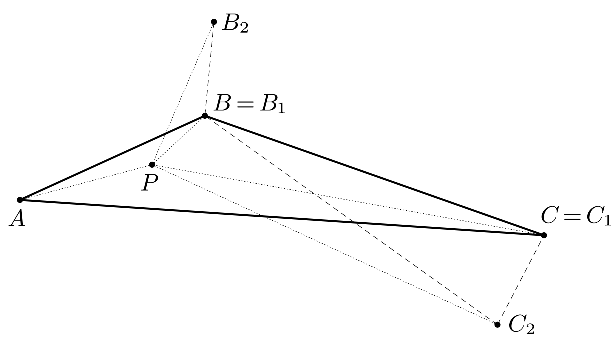


Hasonló gondolatmenetet követve, P csak úgy lehet megoldása az (F) Fermat-feladatnak, ha az ott összefutó, csúcsokból induló élek $2\pi/3$ szögben találkoznak. Vagyis, ha P a háromszög izogonális pontja.

Az érvelésből az is következik, hogy a háromszög bármely pontjából a csúcsokba húzott szakaszok összhossza legalább akkora, mint az izogonális pontból a csúcsokba húzott szakaszok összhossza. Tehát a szóban forgó minimum feladatnak létezik megoldása, és azt az izogonális pont választásával nyerjük. □

3. lemma. (Lebegő eset.) *Ha ABC olyan háromszög, melynek van legalább $2\pi/3$ nagyságú szöge, akkor az* (F) *Fermat-feladat megoldása a háromszög tompaszögű csúcsa.*

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy az $ABC = AB_1C_1$ háromszögben a B csúcsnál található a szóban forgó szög. Tekintsük a háromszög tetszőleges olyan P pontját, mely nem a B csúcs. Vegyük föl a C_2 pontot úgy, hogy $B_1C_1 = B_1C_2$, valamint $AB_1C_2\sphericalangle = 2\pi/3$ teljesüljenek. Az általánosság sérelme nélkül föltehető, hogy P benne van az AB_1C_2 háromszögben; egyébként ugyanis hasonló konstrukciót alkalmazhatunk C helyett az A csúcsra. Végezetül, válasszuk meg a B_2 pontot tetszőlegesen a B_1-ből induló azon félegyenesen, amely $2\pi/3$ szöget zár be azokkal a félegyenesekkel, melyek B_1-ből indulnak és tartalmazzák az A, illetve a C_2 pontokat.



Mivel az AB_2C_2 háromszögnek B_1 izogonális pontja, ezért a 2. lemma miatt megoldása az A, B_2, C_2 pontokra vonatkozó (F) Fermat-feladatnak. Ily módon

$$AB_1 + B_2B_1 + C_2B_1 < AP + B_2P + C_2P < AP + B_2B_1 + B_1P + C_2P$$

adódik, amiből rendezéssel (és a jelölések figyelembe vételével) kapjuk, hogy

$$AB + BC = AB_1 + B_1C_1 = AB_1 + B_1C_2 < AP + B_1P + C_2P.$$

Elegendő tehát csupán azt igazolnunk, hogy $C_2P < C_1P$. Ez azonban következik abból, hogy a PC_1C_2 háromszögben a C_1 csúcsnál lévő szög kisebb, mint a C_2 csúcsnál lévő szög. □

Megjegyzés. A Torricelli-asztalon a csomópont egészen a tompaszögű csúcsig mozdul el, mert az erők nem tudják kiegyenlíteni egymást.

Rövidesen kiderül, hogy a Fermat-feladat messze túlnövi az esettanulmány kategóriáját. A fő eredmény síkbeli változata jelentős részben ezen múlik. A térbeli változathoz azonban szükségünk lesz még egy eredményre.

4. lemma. *Ha $ABCD$ tetszőleges tetraéder, akkor*

$$\min\{BAC\sphericalangle, CAD\sphericalangle, DAB\sphericalangle\} < \frac{2\pi}{3}.$$

Bizonyítás. Legyenek $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ az A csúcsból rendre a B, C, D csúcsok irányába mutató egységvektorok, valamint

$$\alpha_1 := \sphericalangle(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = CAD\sphericalangle,$$
$$\alpha_2 := \sphericalangle(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1) = DAB\sphericalangle,$$
$$\alpha_3 := \sphericalangle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = BAC\sphericalangle.$$

Tegyük fel indirekt módon, hogy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [2\pi/3, \pi]$. Fölhasználva, hogy a koszinuszfüggvény a $[2\pi/3, \pi]$ intervallumon monoton csökkenő, az alábbiakat kapjuk:

$$\|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\|^2 = \|\mathbf{a}_1\|^2 + \|\mathbf{a}_2\|^2 + \|\mathbf{a}_3\|^2 + 2\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle + 2\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\rangle + 2\langle \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1\rangle =$$
$$= 3 + 2(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3) \leq 3 + 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$. Ám ekkor az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ vektorok egy síkban vannak, ami ellentmondás. $\square$

Mindezek birtokában már megfogalmazhatjuk és igazolhatjuk fő eredményünket. Ez az eredmény szükséges feltételeket ad arra nézve, hogy egy hálózat adott véges ponthalmaz legrövidebb hálózata legyen.

Tétel. *Ha H véges síkbeli ponthalmaz, $\mathcal{G}$ ennek legrövidebb hálózata, akkor*
(i) $\mathcal{G}$ olyan fagráf, melynek élei egyenes szakaszok;
(ii) minden alappontból legfeljebb három él indul és legalább $2\pi/3$ szögben;
(iii) minden csomópontból pontosan három él indul és pontosan $2\pi/3$ szögben;
(iv) élek csak alappontban vagy csomópontban találkozhatnak;
(v) $\mathcal{G}$ teljes egészében H konvex burkán belül halad.
Továbbá, a csomópontok száma legalább kettővel kevesebb az alappontok számánál. Végezetül, ha H térbeli halmaz, akkor az előzőek mellett még az is teljesül, hogy bármelyik csomópontból induló élek közös síkban vannak.

Bizonyítás. Világos, hogy ha $\mathcal{G}$ legrövidebb hálózat, akkor összefüggő, körmentes, és élei egyenes szakaszok. Vagyis, $\mathcal{G}$ eleget tesz az (i) tulajdonságnak.

Tegyük fel indirekt módon, hogy valamely $\mathcal{G}$-beli A csúcs foka legalább négy. Tekintsünk egy olyan A középpontú zárt körlapot, amely nem tartalmaz további csúcsot. Az indirekt feltétel szerint létezik két olyan A-ból induló él, melyek a körlap határát a B és C pontokban metszve, egyenlő szárú és hegyesszögű ABC háromszöget alkotnak. A 2. lemma miatt ennek P izogonális pontjára

$$AP + BP + CP < AB + AC$$

teljesül. Vagyis, az A csúcsból induló AC és BC szakaszokat törölve, majd P beiktatásával az AP, BP, CP szakaszokat fölvéve, az eredetinél rövidebb összefüggő hálózat nyerhető. Ez azonban ellentmond $\mathcal{G}$ minimalitásának. Tehát bármely csúcs foka legfeljebb három. Nyilvánvaló továbbá, hogy csomópont foka nem lehet háromnál kevesebb. Mindezekből, szem előtt tartva a 2. lemma és a 3. lemma szögekre vonatkozó feltételeit, a (ii) és (iii) tulajdonságokat kapjuk.

A (iv) feltétel azt mondja ki, hogy $\mathcal{G}$ nem lehet önmetsző. Valóban, ha két él keresztezné egymást, akkor a metszéspontra megismételve az imént látott gondolatmenet fokszámokra vonatkozó részét, rövidíthetnénk a hálózatot.

Jelölje most a $\mathcal{G}$ alappontjainak számát n, a beiktatott csomópontokét pedig m. Mivel fagráfban az élek száma eggyel kevesebb a csúcsok számánál, ezért $n + m - 1 = e$, ahol e az élek száma. Másrészt, minden gráfban a fokszámok összege kétszerese az élek számának. Ám a fokszámok összege most (ii) és (iii) miatt legalább $n + 3m$. Az eddigieket összevetve tehát

$$2(n + m - 1) \geq n + 3m.$$

Ebből rendezéssel kapjuk, hogy $m \leq n - 2$. Vagyis, a csomópontok száma legalább kettővel kevesebb az alappontok számánál.

Az (v) tulajdonság bizonyítása ismét indirekt módon történik. Tegyük fel, hogy létezik csomópont a konvex burkon kívül. Mivel a konvex burok előáll a halmazt tartalmazó félsíkok metszeteként, ezért van olyan nyílt félsík, amely tartalmaz csomópontot, de nem tartalmaz alappontot. Válasszunk most egy olyan P csomópontot, amely benne van e félsíkban és távolsága a félsík határegyenesétől maximális. A P ilyen választása lehetséges, hiszen már láttuk, hogy a csomópontok halmaza is véges. Húzzunk párhuzamost a félsík határával P-n keresztül. Mivel P-ből három él indul páronként $2\pi/3$ szög alatt, ezért lesz olyan Q csomópont, amelyet az imént fölvett párhuzamos elválaszt a H konvex burkától. Ám ekkor az eredeti határegyenestől Q nagyobb távolságra van, mint P, ami ellentmondás.

A térbeli esetben csupán a (ii) és (iii) állítások megfelelőire térünk ki. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{G}$ hálózat A csúcsának foka legalább négy. Tekintsünk egy olyan gömböt, melynek A a középpontja és nem tartalmaz további csúcsot. Válasszunk ki tetszőlegesen három A-ból induló élt, s jelölje ezeknek a gömbbel való metszéspontját B, C, D. A 4. lemma miatt az ABC, ACD, ADB háromszögek egyikében az A csúcsnál lévő szög $2\pi/3$-nál kisebb. Föltehető, hogy ez éppen az ABC háromszög. Ekkor ennek P izogonális pontját véve,

$$AP + BP + CP + AD < AB + AC + AD.$$

Ez azonban nem lehetséges, hiszen $\mathcal{G}$ minimális hálózat. Tehát, A, B, C, D szükségképpen közös síkban vannak. Ugyanezt az érvelést megismételve kapjuk, hogy valamennyi A-ból induló él egy síkban van. Azonban ekkor a már igazolt (ii) és (iii) tulajdonságok miatt A foka legfeljebb három; sőt, ha csomópontról van szó, pontosan három. $\square$

Az a tény, hogy az alaphalmaz elemszáma segítségével korlátozható a csomópontok (s ezáltal a szóba jövő gráfstruktúrák) száma, kiemelt jelentőséggel bír. Ennek köszönhető ugyanis, hogy *bármely véges ponthalmaznak létezik legrövidebb összekötő hálózata.* A bizonyítás a megfelelő elméleti háttér birtokában nem nehéz. A gráfelmélet és geometria módszerei mellé segítségül kell hívni az analízist: a hálózat létezése a kompaktság és folytonosság kapcsolatán múlik. E kapcsolat tisztázása azonban már messze túlmutat cikkünk keretein, sőt a középiskola szabta határokon is.

Érdemes hangsúlyoznunk, hogy a konvex burokkal kapcsolatos (v) tulajdonság bizonyításához rengeteg munka árán, az előző, sőt az utána megfogalmazott tulajdonságok fölhasználásával juthattunk el. Ezzel szemben, a Fermat-feladat megoldásához éppen a konvex burokra vonatkozó 1. lemma jelentette a kiinduló lépést.

4. Alkalmazások

Lássuk ezek után, mit ad a főtétel a **Gy. 1591.** nehezített változatára. Vagyis: hogyan nyerjük az egységnégyzet legrövidebb hálózatát? Mint említettük, a problémának bizonyíthatóan *létezik* minimumot szolgáltató megoldása. Azt fogjuk megmutatni, hogy ez nem más, mint a korábban már bemutatott fagráf. Ennek topológiai struktúrája egyértelműen, a geometriai pedig szimmetriáktól eltekintve egyértelműen adott.

Az érvelésben szükségünk lesz a következő elemi észrevételre. Ismeretes, hogy bármely háromszög adott csúcsának szögfelezője és a csúccsal szemközti oldal felezőmerőlegese a körülírt körön metszi egymást. Így az ABC háromszög C csúcsa és P izogonális pontja által adott egyenes szögfelező az ABP háromszögben, s ezért az AB oldal felezőmerőlegesét az ABP körülírt körének D pontjában metszi. E pontból az AB oldal $\pi/3$ szög alatt látszik, vagyis ABD szabályos háromszög. Ez az észrevétel egyébként igen jól alkalmazható egyéb pontrendszerek esetére is.

Tekintsük ezek után az egységnégyzet csúcsait, mint az alappontok halmazát. A főtétel (v) pontja miatt ezek foka nem lehet egytől különböző. Ellenkező esetben ugyanis az ott találkozó élek szöge legfeljebb $\pi/2$, ami ellentmond a (ii) tulajdonságnak. A keresett hálózatban tehát négy elsőfokú csúcs szerepel, valamint néhány további, három fokú csomópont. Könnyen adódik, hogy a csomópontok száma kettő. Ilyen típusú fagráfból pontosan egy létezik, mégpedig az, amelyet korábban már megadtunk. Vagyis, a topológiai struktúra egyértelmű.

A geometriai struktúra lényegi egyértelműségének igazolásához vegyük figyelembe, hogy átlós alappontok nem csatlakozhatnak közös csomóponthoz. Valóban, két átlós alappont közti út két részre bontja a négyzetlapot, s mivel a főtétel (v) pontja szerint a hálózat a négyzetlapon belül marad, a másik átlós pár közötti út metszené az előbbit. Ez azonban (iv) miatt nem lehetséges.

Tekintsük tehát azt a lehetőséget, amikor két szomszédos alappont csatlakozik közös csomóponthoz. A két csomópont által meghatározott egyenes e háromszögnek szögfelezője, így van közös pontja a két alappont felezőmerőlegesével (mégpedig a körülírt körön). Ugyanez teljesül a másik két alappont és a hozzájuk csatlakozó csomópont által meghatározott háromszögre. Tehát a csomópontok által meghatározott egyenes mindkét szemközti oldal felezőmerőlegeséről tartalmaz egy-egy pontot; ámde a két felezőmerőleges azonos, így egybeesik a csomópontok által meghatározott egyenessel. Nyilván párhuzamos oldalpárok bármelyikének alappontjaiból kiindulva ugyanazt a hálózatot kapjuk. Minthogy két párhuzamos oldalpár van, ezért két (forgatással fedésbe hozható) hálózat keletkezik.

A főtétel egyébként más ponthalmazok esetében is igen hatékonyan használható. A teljesség igénye nélkül néhány ilyen esetet feladat formájában fogalmazunk meg. Külön figyelmet érdemel a szabályos hatszög csúcsait összekötő legrövidebb hálózat kérdése. A főtételnek eleget tevő gráfsturktúra ugyanis ekkor már nem egyértelmű. S a burjánzásnak indult szerkezeti gazdagság dacára, a legjobb megoldás egyben a legegyszerűbb ...

Feladat. *Határozzuk meg a szabályos ötszög csúcshalmazához tartozó legrövidebb hálózatot. Igazoljuk, hogy e hálózat szimmetriáktól eltekintve egyértelmű, és adjuk meg teljes hosszát.*

Feladat. *Igazoljuk, hogy a szabályos hatszög csúcshalmazához tartozó, a főtétel kívánalmainak eleget tevő fagráfból három típus lehetséges. Bizonyítsuk be, hogy ezek geometriai helyzete szimmetriáktól eletekintve egyértelmű. Mennyi a legrövidebb hálózat hossza?*

Feladat. *Határozzuk meg a szabályos tetraéder csúcshalmazához tartozó legrövidebb hálózatot. Igazoljuk, hogy e hálózat szimmetriáktól eltekintve egyértelmű, és adjuk meg a teljes hosszát.*

5. Megjegyzések

Végezetül, érdemes még néhány sort áldoznunk a bemutatott témakör fordulatokban gazdag, izgalmas történeti hátterének vázlatos ismertetésére.

Az $n = 3$ speciális eset, vagyis az (F) minimum feladat, vélhetően René Descartes (1596–1650) problémafölvetésétől ihletve [6], Pierre de Fermat (1607–1665) révén jutott el a kor matematikusaihoz [7]. A jelenlegi adatok birtokában, a kötött eset első megoldója Evangelista Torricelli (1608–1647), míg a lebegő eseté Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647) volt (lásd a [21] és [3] összegyűjtött műveket). A kötött esetnek, vagyis a 2. lemma állításának elegáns bizonyítása Hofmantól származik [12], és ugyancsak ez található Reiman István könyvében [17]. Harold Scott MacDonald Coxeter (1907–2003) szintén ezt a megközelítést ismerteti [5], sőt kiterjeszti a lebegő esetre. A probléma térbeli kiterjesztését biztosító 4. lemma alapgondolata Gilbert és Pollack [9] dolgozatából származik. További érdekes matematikai és történeti részletek találhatók a Fermat–Torricelli–Cavalieri problémakörrel kapcsolatban Szmerka Gergely cikkében [20].

Az $n = 4$ eset 1811-ben bukkant föl először. A probléma megfogalmazása és megoldása Joseph Diaz Gergonne (1771–1859) nevéhez fűződik. Az általános esettel kapcsolatban számos alapvető eredményt, így például a szögfeltételt és a fokszám feltételt sikerült megkapnia. Érvelésében nem az analízis eszköztárát, hanem Torricelli módszerét alkalmazta.

Természetesen nem maradhat ki Carl Friedrich Gauss (1777–1855) neve sem a kortörténeti háttérből. Az $n = 4$ speciális esetet 1836-ban egyik kortársa, Heinrich Christian Schumacher dán-német csillagász (1780–1850) vetette föl neki levélben. Igen vázlatos megoldást javasolt ugyan Gauss, azonban sem akkor, sem később nem foglakozott behatóan a problémával. Amint válaszleveléből világosan kiderül, mégis látta benne a lehetőséget: *„Jómagam úgy vélem, hogy e probléma kiválóan alkalmas arra, hogy tanítványaink figyelmébe ajánljuk.”*

Gauss ezúttal sem tévedett: Karl Bopp (1856–1905) doktori értekezése 1879-ben pontosan e témát dolgozta föl [1]. Az $n = 4$ eset részletes analitikus tárgyalása mellett Bopp kitért az $n = 5$ esetre, sőt elegáns módszerrel képletet adott az úgynevezett *teljes topológiák* számának meghatározására.

A probléma 1934-ben ismét fölbukkant, ezúttal két cseh matematikus, Vojtěch Jarník (1897– 1970) és Milŏs Kössler (1884–1961) dolgozatában [14]. Fő eredményük lényegében azonos az általunk ismertetett tétellel, bár módszerük különbözik a miénktől. Alkalmazásként kitértek a négyzet és a szabályos ötszög esetére. Szép bizonyítást adtak arra, hogy $n \geq 13$ esetén a szabályos n-szög legrövidebb hálózata a kerület mentén halad, egy oldal elhagyásával. Mivel dolgozatuk csehül íródott, ezért eredményeik lényegében rejtve maradtak a tudományos világ előtt. Eredeti dolgozatuk első részének angol változata 2008-ban jelent meg Korte és Nesĕtřil jóvoltából [15].

Az az elszigeteltség, amely Jarník és Kössler eredményeit övezte, az egész témakör végzetszerű jellemzője. A legrövidebb hálózatok kutatása újra és újra előtérbe került, hogy aztán a feledés homályába süllyedjen. A kutatók lényegében nem értesültek egymás eredményeiről. Nem csoda hát, hogy Courant és Robins népszerű könyve [4] a témakört Jakob Steiner (1796–1863) nevéhez fűzte, holott Steinernek semmi köze nem volt ahhoz.

Az 1960-as években a problémakör ismételt lendületet kapott és virágzásnak indult. Ennek oka a fontos alkalmazások mellett a számítógépek fejlődése, melyek lehetővé tették a közelítő algoritmusok megvalósítását. A megjelent cikkek sokáig a *Steiner-fa probléma* elnevezést használták, ami az előzőek miatt nem is meglepő. A prioritás kérdésével a már említett [15] cikk mellett foglakozik Hwang, Richards és Winter tanulmánya [13]. A legteljesebb történeti áttekintést azonban Brazil, Graham, Thomas és Zachariasen átfogó műve jelenti [2].

Hivatkozások

[1] Bopp, K.: *Üeber das kürzeste Verbindungssystem zwischen vier Punkten,* doktori értekezés, Universität Göttingen (1879).

[2] Brazil, M., Graham, R. L., Thomas, D. A. and Zachariasen, M.: On the history of the Euclidean Steiner tree problem, *Arch. Hist. Exact Sci.,* DOI 10.1007/s00407-013-0127-z.

[3] Cavalieri, B.: *Exercitationes Geometricae Sex* (1647).

[4] Courant, R. és Robbins, H.: *Mi a Matematika?,* Gondolat Kiadó (Budapest, 1966).

[5] Coxeter, H. S. M.: *A geometriák alapjai,* Műszaki Könyvkiadó (Budapest, 1987).

[6] Descartes, R.: *Oeuvres de Descartes,* Vol. II. (ed. J. Vrin) (Paris, 1896).

[7] de Fermat, P., *Oeuvres,* Vol. I. (1891).

[8] Gergonne, J. D.: Solutions purement géométriques des problèmes de minimis proposés aux pages 196, 232 et 292 de ce volume, et de divers autres problèmes analogues, *Annales Math. Pures Appl.,* **1** (1810), 375–384.

[9] Gilbert, E. N. and Pollak, H. O.: Steiner minimal trees, *SIAM J. Appl. Math.,* **16** (1968), 1–29.

[10] Herczeg J. és Reiman I.: Sík mezőben hármas út . . . , *Élet és Tudomány* melléklete, diák-IX–X-oldal, 1998.

[11] Herczeg J. és Reiman I.: A háromszög izogonális pontja, *Élet és Tudomány* melléklete, diák-XXV–XXVI-oldal, 1998.

[12] Hofman, J. E.: Elementare Lösung einer Minimumsaufgabe, *Zeitschr. Math.-Naturwiss Unterr.,* **60** (1929), 22–23.

[13] Hwang, F. K. and Richards, D. S. and Winter, P.: The Steiner tree problem, Ann. *Discrete Math.,* **53** (1992), North-Holland Publishing Co. (Amsterdam).

[14] Jarník, V. and Kössler, M.: 0 minimálních grafech obsahujících n daných bodu, *Čas. Pěstování Mat.,* **63** (1934), 223–235.

[15] Korte, B. and Nešetřil, J.: Vojtěch Jarnik's work in combinatorial optimization, *Discrete Math.,* **235** (2001), 1–17.

[16] Pólya Gy.: *Indukció és analógia,* Gondolat Kiadó (Budapest, 1988).

[17] Reiman I.: *Geometria és határterületei,* Gondolat Kiadó (Budapest, 1986).

[18] Steinhaus, H.: *Matematikai kaleidoszkóp,* Gondolat Kiadó (Budapest, 1984).

[19] Szabó G.: *Shortest networks of finite sets,* M.Sc. Thesis (Supervisor: M. Bessenyei), University of Debrecen (Debrecen, 2017).

[20] Szmerka G.: Ízelítő a Fermat–Torricelli problémakörből, *KöMaL,* **58** (2008), 194–201.

[21] Torricelli, E.: De maximis et minimis, in: *Opere di Evangelista Torricelli* (ed. Loria, G. and Vassura), G. Faenza (Italy, 1919).