I. rész

1. *Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény:*

$$f(x) = -x^2 - 3x + 4 \quad \text{és} \quad g(x) = x^2 + 2x - 3.$$

a) Adjuk meg az $f \circ g$ függvény hozzárendelési szabályát.
(Az összetett függvény definíciója: $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$.)
b) Van-e olyan x_0 hely, ahol az f és g függvényekhez húzható érintők párhuzamosak egymással?
c) Számítsuk ki az f és g függvények grafikonja által közbezárt korlátos terület nagyságát. *(14 pont)*

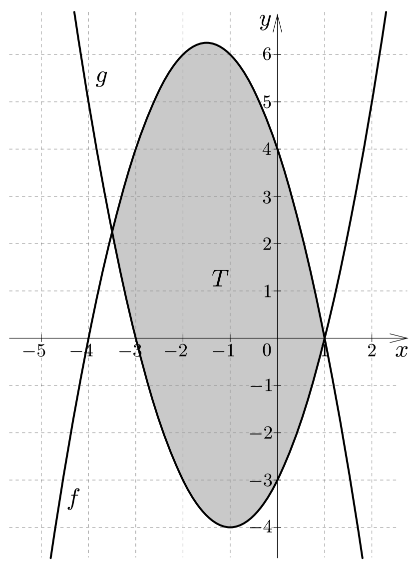
Megoldás. *a)*

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = -\big(x^2 + 2x - 3\big)^2 - 3\big(x^2 + 2x - 3\big) + 4 = -x^4 - 4x^3 - x^2 + 6x + 4.$$

b) Ha valamely x_0 helyen a két függvényhez húzható érintők párhuzamosak egymással, akkor $f'(x_0) = g'(x_0)$, vagyis $-2x_0 - 3 = 2x_0 + 2$, ahonnan $x_0 = -\frac{5}{4}$.

Tehát van ilyen x_0 hely: $x_0 = -\frac{5}{4}$.

c) Az f és g függvényt derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva az f függvény képe egy lefelé nyíló parabola, melynek két zérushelye -4 és 1, a g függvény képe pedig egy felfelé nyíló parabola, melynek zérushelyei -3 és 1.



A két függvény metszéspontjait (az integrálszámítás határait) az $f(x) = g(x)$ egyenlet gyökei adják: $-x^2 - 3x + 4 = x^2 + 2x - 3$, ahonnan $x_1 = -\frac{7}{2}$ és $x_2 = 1$.

A keresett T területet integrálszámítással határozhatjuk meg:

$$T = \int_{-\frac{7}{2}}^{1} \big(-x^2 - 3x + 4 - x^2 - 2x + 3\big)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{7}{2}}^{1} \big(-2x^2 - 5x + 7\big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-2 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 7x\right]_{-3{,}5}^{1} = \frac{243}{8}.$$

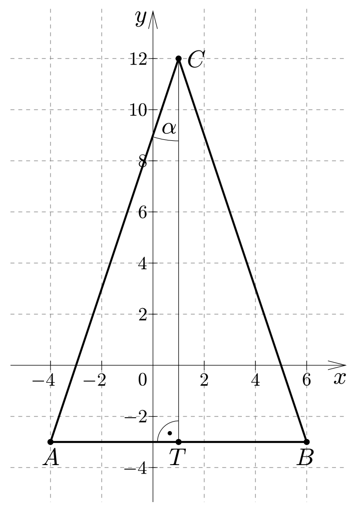
2. *A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsai: $A(-4;-3)$, $B(6;-3)$ és $C(1;12)$.*
a) Mennyi az $\overrightarrow{AS}$ és a $\overrightarrow{BS}$ vektorok skalárszorzata, ha S az ABC háromszög súlypontja?
b) Mekkora és milyen irányú szöggel kell elforgatni az ABC háromszöget a C csúcs körül, hogy az AC oldal párhuzamos legyen az ordinátatengellyel? *(11 pont)*

Megoldás. *a)* Az ABC háromszög S súlypontjának koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepe:

$$S\left(\frac{-4+6+1}{3}; \frac{-3-3+12}{3}\right) = (1;2),$$

ezért $\overrightarrow{AS} = (5; 5)$, $\overrightarrow{BS} = (-5; 5)$, és így $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BS} = 0$.

b) Mivel az AB oldal párhuzamos az x tengellyel, ezért a háromszög CT magassága párhuzamos lesz az y tengellyel. Ha az ACT szöget α-val jelöljük, akkor a háromszöget a C csúcs körül éppen $+\alpha$ szöggel kell elforgatni, hogy az AC oldal párhuzamos legyen az y tengellyel.



Az ACT derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{5}{15}$, ahonnan $\alpha \approx 18{,}43°$.

Tehát az ABC háromszöget kb. $+18{,}43°$-os szöggel kell elforgatni a C csúcs körül.

3. *Egy konyhán egy* 5 *literes kondérban tésztafőzésre forralnak vizet. A vízbe* 50 gramm *sót tettek, amit a főszakács sokall, ezért egy nagy fél literes merőkanállal kivesz az oldott sós vízből, és a helyére egy merőkanál tiszta vizet tesz. Alapos keverés után megkóstolja a vizet, de még mindig túl sósnak találja, ezért a sós vízből ismét kivesz fél litert, és a hiányt tiszta vízzel pótolja. A kóstolás után még egyszer utoljára megismétli az előbbi műveletet. Tételezzük fel, hogy minden művelet előtt a só egyenletesen oldódott, és a térfogat-növekedéstől, amit betétele okozott, tekintsünk el.*

a) *Mennyi só maradt a vízben? Az eredményt tizedgrammra kerekítve adjuk meg.*

b) *Hányszor kellene a fenti műveletet megismételni ahhoz, hogy legfeljebb* 25 gramm *só maradjon a vízben?* (*13 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel a kanál térfogata tizedrésze a kondér térfogatának, ezért a sótartalomnak is mindig a tizedét vesszük ki.

Az első lépésben kivett só mennyisége 5 gramm, hiszen fél liter vízben 5 gramm só van.

A második lépésben ismét a még meglevő sómennyiség tizedét vesszük ki, azaz $50 - 5 = 45$ grammból 4,5 grammot.

A harmadik lépésben már csak $45 - 4{,}5 = 40{,}5$ gramm só maradt a vízben, melynek tizedét kivéve 4,05 grammot veszünk ki.

Tehát a megmaradt só mennyisége $40{,}5 - 4{,}05 = 36{,}45$ gramm, ami egy tizedesjegyre kerekítve 36,5 gramm.

b) Ha a fenti folyamatban n lépést végzünk el, akkor az oldatban maradó só mennyiségét az $50 \cdot 0{,}9^n$ összefüggés adja meg, hiszen minden lépésben a megmaradt só mennyiségének 10%-át vesszük ki.

A feladat szövege alapján megoldandó az alábbi egyenlőtlenség:

$$50 \cdot 0{,}9^n \le 25.$$

(Az egyenlőtlenséget rendezve, majd mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve:)

$$\lg 0{,}9^n \le \lg 0{,}5.$$

(A logaritmus azonosságát felhasználva, majd rendezve:)

$$n \ge \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}9} \approx 6{,}58.$$

Mivel n csak egész szám lehet, ezért a folyamatot legalább 7-szer kell megismételni.

4. *Egy gimnázium* 9. *osztályos tanulói év végén rendelték meg iskolájukban a következő tanévhez szükséges tankönyveket. Összesen* 7 *fajta könyvet rendelhettek, minden tantárgyból egyet-egyet. Minden gyerek kapott egy megrendelőlapot, ahol a megfelelő mezőbe tett* **X** *jellel jelezhette rendelési szándékát. (Az alábbi táblázatnak megfelelő diák a magyar, történelem és kémia könyveket rendelte meg.)*

magyar	matematika	történelem	angol	földrajz	fizika	kémia
X		**X**				**X**

A tankönyvrendelések összesítésekor a tankönyvfelelős megállapította, hogy nem volt olyan tanuló, aki egyetlen könyvet sem rendelt és nem volt két olyan diák, akik pontosan ugyanazokat a könyveket rendelték volna meg.

a) Legfeljebb hány diák jár ennek az iskolának a 9. évfolyamára?

A 9.B. osztálynak 24 tanulója van, fiúk és lányok vegyesen. Az osztályból két tanulót véletlenszerűen kiválasztunk.

b) Hány fiú és hány lány jár az osztályba, ha annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott diákok különböző neműek, a lehető legnagyobb? (*13 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* Mivel nem volt két olyan diák, akik pontosan ugyanazokat a könyveket rendelték meg, ezért azoknak a diákoknak a száma, akik pontosan egy darab könyvet rendeltek legfeljebb 7.

Azoknak a diákoknak a száma, akik pontosan két darab könyvet rendeltek legfeljebb $\binom{7}{2}$, hiszen 7 darab könyvből ennyiféleképpen lehet kettőt kiválasztani.

Hasonló meggondolással számítható ki a három, négy, ..., hét darab könyvet rendelők maximális száma, ezért a 9. évfolyamra járó diákok száma legfeljebb

$$\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}=127.$$

II. megoldás. A tanulók minden könyvről egyértelműen eldönthetik, hogy megrendelik-e vagy sem, ezért a lehetséges megrendelések (és egyben tanulók) száma legfeljebb $2^7=128$. Mivel olyan diák nem volt, aki egyetlen könyvet sem rendelt meg, ezért az évfolyamra legfeljebb $128-1=127$ tanuló járhat.

b) Jelölje a lányok számát l, a fiúkét f. A feladat szövege alapján $l+f=24$. 24 tanulóból 2-t $\binom{24}{2}$-féleképpen választhatunk ki, ezért az összes eset száma $\binom{24}{2}$. 1 lányt és 1 fiút $\binom{l}{1}\cdot\binom{f}{1}$-féleképpen választhatunk ki, ezért a kedvező esetek száma $\binom{l}{1}\cdot\binom{f}{1}$. Az $l+f=24$ összefüggést felhasználva a keresett valószínűség:

$$P=\frac{\binom{l}{1}\cdot\binom{f}{1}}{\binom{24}{2}}=\frac{l\cdot f}{276}=\frac{l\cdot(24-l)}{276}=\frac{24l-l^2}{276}=\frac{144-(l-12)^2}{276}.$$

A tört értéke akkor maximális, ha a számlálója maximális. A számlálóban lévő különbség akkor lesz a lehető legnagyobb, ha a négyzetes tag a legkisebb, azaz 0. Ebből következik, hogy $l=12$ és $f=12$.

Tehát 12 lány és 12 fiú jár az osztályba.

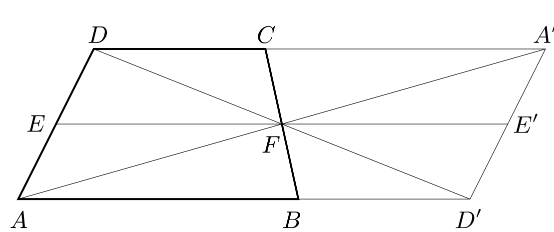
II. rész

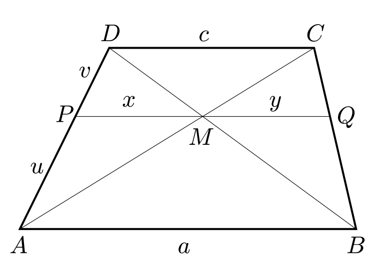
5. *Egy trapézban húzzuk be a középvonalat, majd az alapokkal párhuzamosan két szakaszt: az átlók metszéspontján áthaladó, illetve a trapéz területét felező szakaszt.*

a) Igazoljuk, hogy a behúzott három szakasz hossza rendre az alapok számtani, harmonikus és négyzetes közepe.

b) Indokoljuk meg megfelelő ábra alapján az a) *feladatban megadott három közép nagyságának sorrendjét.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Tükrözzük az $ABCD$ trapézt a BC szár F felezőpontjára. A tükrözés után kapott $AD'A'D$ négyszög paralelogramma, melyben $EE'=AD'=A'D=AB+CD$, illetve $EE'=2EF$. Az előbbi két egyenlőségből $EF=\dfrac{AB+CD}{2}$, tehát a trapéz középvonalának hossza valóban az alapok hosszának számtani közepe.





Az ABD háromszög hasonló a PMD háromszöghöz, mert megfelelő szögeik egyenlők, ezért $\frac{x}{a}=\frac{v}{u+v}$.

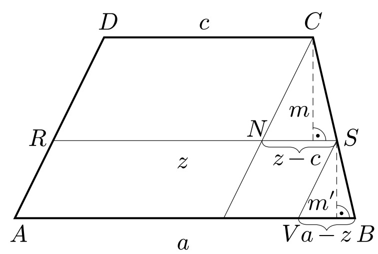
Az ADC háromszög hasonló az APM háromszöghöz, mert megfelelő szögeik egyenlők, ezért $\frac{x}{c}=\frac{u}{u+v}$.

Az előbbi két egyenlet megfelelő oldalait összeadva $\frac{x}{a}+\frac{x}{c}=\frac{v}{u+v}+\frac{u}{u+v}=1$, melyből rendezéssel $x=\frac{ac}{a+c}$. Hasonló meggondolással belátható, hogy $y=\frac{ac}{a+c}$, így

$$PQ=x+y=\frac{2ac}{a+c},$$

tehát a trapéz átlóinak metszéspontján át húzott szakasz hossza az alapok harmonikus közepe.

Jelölje RS a trapéz alapjaival párhuzamos, annak területét felező szakaszt, melynek hossza z. Legyen az $RSCD$ trapéz magassága m, az $ABSR$ trapézé pedig m'. Húzzunk párhuzamost az AD szárral a C és az S pontokon keresztül, melyek az RS, illetve az AB szakaszt rendre az N, illetve a V pontban metszik.



A VBS háromszög hasonló az NSC háromszöghöz, mert megfelelő szögeik egyenlők, ezért

$$\frac{a-z}{z-c}=\frac{m'}{m}.$$

Mivel az $ABSR$ és $RSCD$ trapézok területe egyenlő, ezért $\frac{a+z}{2}\cdot m'=\frac{z+c}{2}\cdot m$.

Az előbbi két egyenletből $\frac{a-z}{z-c}=\frac{z+c}{a+z}$, melyet átrendezve $z^2=\frac{a^2+c^2}{2}$, ahonnan

$$z=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}.$$

Tehát a trapéz területét felező, alapokkal párhuzamos szakasz hossza az alapok hosszának négyzetes közepe.

b) Mivel az ábrán $c<a$, ezért a trapéz területét felező szakasz a középvonal alatt, míg az átlók metszéspontján áthaladó szakasz a középvonal felett helyezkedik el. Ebből következik, hogy a három közép nagysága növekvő sorrendben: harmonikus, számtani, négyzetes.

6. *Egy mobiltelefonokat gyártó cég minden évben ősszel jelenteti meg legújabb csúcskészülékét. Az újonnan kapható okostelefon kijelzőjén összesen* 273 460 *pixellel több képpont található, mint az egy évvel korábban megjelent azonos típusú régebbi telefonén. Ez azért van, mert az új telefon széltében* 198*, hosszában pedig* 110 *pixellel több képpontot tud kijelezni.*

a) *Mekkora (hányszor hány pixel) az új telefon képernyőfelbontása, ha a régebbi készülék kijelzőjén összesen* 727 040 *képpont található?*

A gyártó cég szeretné a készülékeladásból származó bevételét maximalizálni, melyet az eladási ár megfelelő meghatározásával szeretne elérni. A cég vezetői az eddigi tapasztalatok alapján azt feltételezik, hogy ha a készüléket 120 000 Ft*-ért árusítják, akkor mind az* 1000 *telefonra érkezik megrendelés, ha pedig az eladási árat* 3 000 Ft*-tal megemelik, akkor a rendelések száma* 20 *darabbal csökken, és minden további* 3000 Ft*-nyi emelés újabb* 20 *darabbal csökkenti a megrendelések számát.*

b) *Mennyi legyen a készülék eladási ára, hogy a cég bevétele maximális legyen ezen az eladáson?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Jelölje x és y a régebbi telefon kijelzőjén lévő vízszintes és függőleges képpontok számát. A feladat szövege alapján az alábbi egyenletrendszer írható fel:

$$x\cdot y=727\,040,$$
$$(x+198)\cdot(y+110)=1\,000\,500.$$

A második egyenlet bal oldalán a kijelölt szorzást elvégezve, majd az egyenletet rendezve a következő (egyszerűbb) egyenletrendszerhez jutunk:

$$x\cdot y=727\,040,$$
$$110x+198y=251\,680.$$

Az első egyenletből az egyik ismeretlent kifejezve, majd azt a második egyenletbe behelyettesítve rendezés és összevonás után a $99y^2 - 125840y + 39987200 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek gyökei $y_1 = 640$ és $y_2 = 631,\dot{1}$. Utóbbi a törtarány miatt nyilván nem megoldása a feladatnak, ezért $x_1 = 1136$.

Ellenőrzés: A régebbi telefon kijelzőjén $1136 \cdot 640 = 727\,040$, míg az új telefon kijelzőjén $(1136+198) \cdot (640+110) = 1\,000\,500$ képpont található, ami valóban 273 460 pixellel több.

Tehát az új telefon képernyőfelbontása 1334×750 pixel.

b) Jelölje x a 3000 Ft-tal történő emelések számát. Ekkor a telefon ára

$$(120\,000 + 3000x) \text{ Ft},$$

az eladott darabszám pedig $(1000 - 20x)$. A (B) bevétel ezer Ft-ban számolva:

$$B(x) = (120 + 3x) \cdot (1000 - 20x) = 60 \cdot (-x^2 + 10x + 2000).$$

Szélsőérték ott lehet, ahol $B'(x) = 0$, ezért $-2x + 10 = 0$, amiből $x = 5$. $x = 5$ esetén B' előjelet vált, tehát B-nek valóban maximuma van.

Tehát a bevétel akkor lesz maximális, ha a telefon árát $120\,000 + 5 \cdot 3000 = 135\,000$ Ft-ban határozzák meg.

7. *a*) *Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan hétpontú egyszerű gráf, amelyben minden pont fokszáma különböző.*

b) *Egy hétpontú egyszerű gráf csúcsai között egyetlen olyan van, melynek fokszáma még egyszer előfordul. Melyik lehet ez a fokszám? Adjunk meg egy, a feladat feltételeinek megfelelő gráfot.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* Egy hétpontú egyszerű gráfban egy pont fokszáma maximum 6 lehet (nincsenek hurok- és többszörös élek), ezért a hét pontra hét lehetőség jut: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Ha van 6 fokszámú pont, akkor nem lehet 0 fokszámú, így csak két lehetőség marad: 0; 1; 2; 3; 4; 5 vagy 1; 2; 3; 4; 5; 6. Mivel 7 pontunk van, a skatulyaelv szerint az egyik fokszámnak legalább kétszer kell előfordulnia, így biztosan nincs a feladat feltételeinek megfelelő gráf.

II. megoldás. Egy hétpontú egyszerű gráfban, ha minden pont fokszáma különböző, akkor a csúcsok fokszámainak lehetséges értékei 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 (nincsenek hurok- és többszörös élek). Mivel bármely egyszerű gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszerese, ezért gráfunknak $\frac{21}{2} = 10{,}5$ éle lenne, ami nem lehetséges. Tehát valóban nincs a feladat feltételeinek megfelelő gráf.

b) Két eset lehetséges: 0; 1; 2; 3; 4; 5; x vagy 1; 2; 3; 4; 5; 6, x.

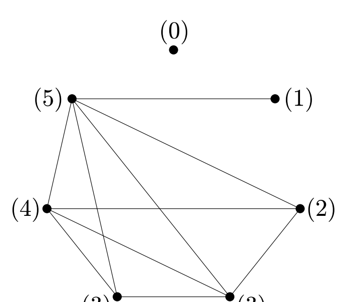
Nézzük először a 0; 1; 2; 3; 4; 5; x esetet.

x értéke nem lehet 0; 2; 4, hiszen ekkor a kapott gráfban a fokszámok összege páratlan lenne, ami a fokszámtétel miatt nem lehetséges.

x értéke nem lehet 5 sem, ugyanis ekkor mindkét 5 fokszámú csúcs az izolált pont kivételével mindegyik másikkal össze lenne kötve, így nem lenne 1 fokszámú csúcs.

x továbbá 1 sem lehet, mert ebben az esetben az 5 fokszámú csúcs hasonlóan össze van kötve az izolált pont kivételével mindegyik másikkal, az 1 fokszámú csúcsok pedig csak az 5 fokszámúval. Ebből következik, hogy már csak az a kérdés, hogy a 2, 3 és 4 fokszámú csúcsok melyik másik csúcsokkal lehetnek összekötve. Mivel az 5 fokszámú csúccsal az előbbi csúcsok mindegyike össze van kötve, ezért a 0, az 1 és az 5 fokszámú négy csúcsot elhagyva egy önálló, 1, 2, 3, fokszámú hárompontú egyszerű gráfot kapnánk, mely nyilván nem lehetséges, hiszen a gráf egyszerű.

Tehát csak a 3-as fokszám ismétlődhet, így a feladat feltételeinek megfelelő gráf:



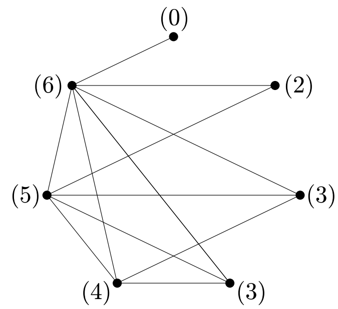
Nézzük a második esetet: 1; 2; 3; 4; 5; 6; x.

x értéke hasonlóan nem lehet 2; 4; 6, hiszen ekkor a kapott gráfban a fokszámok összege ismét páratlan lenne, ami a fokszámtétel miatt szintén nem lehetséges.

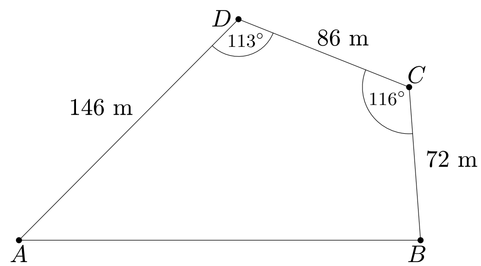
x értéke ugyancsak nem lehet 5, ugyanis ekkor mindkét 5 fokszámú csúcsot össze kellene kötni a 2 fokszámú csúccsal, ami nem lehetséges, hiszen a 6 fokszámú csúcs biztosan össze van kötve vele, és így a fokszáma 3 lenne.

x továbbá 1 sem lehet, hiszen ha az előbbi eset meggondolásához hasonlóan a gráfból elhagyjuk a 6 és a két 1 fokszámú csúcsokat, akkor egy négypontú, önálló egyszerű gráfot kapunk, melynek fokszámai 1-gyel csökkenek, azaz 1, 2, 3, 4, lesznek, ami ismét nem lehetséges, hiszen egy négypontú egyszerű gráfban nem lehet 4 fokszámú csúcs.

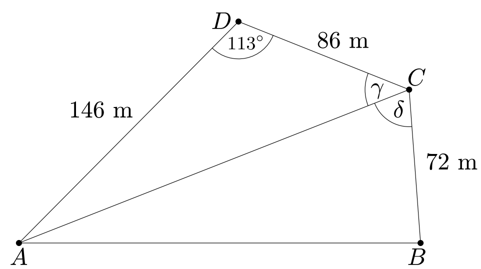
Tehát ebben az esetben is csak a 3-as fokszám ismétlődhet, így a feladat feltételeinek megfelelő gráf:



8. *A mellékelt* ábrán *látható négyszög két szögét* (113 *és* 116 *fok*) *és három oldalát* (146, 86 *és* 72 m) *ismerjük. Mekkora a négyszög területe?* (*16 pont*)



I. megoldás. Bontsuk fel az $ABCD$ négyszöget két háromszögre!



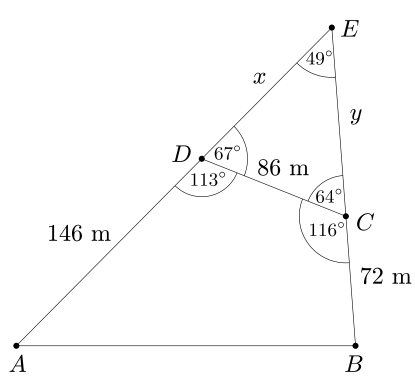
Az ACD háromszögből koszinusztétellel $AC = \sqrt{146^2 + 86^2 - 2 \cdot 146 \cdot 86 \cdot \cos 113°} \approx 196{,}28$ (m).

Az ACD háromszögben alkalmazva a szinusztételt $\dfrac{\sin\gamma}{\sin 113°} = \dfrac{146}{196,28}$, ahonnan ($\gamma < 90°$ miatt) $\gamma \approx 43{,}21°$. Ekkor az ABC háromszögben $\delta = 116° - \gamma \approx 72{,}79°$.

Az $ABCD$ négyszög területe az ABC és CDA háromszögek területének összege:

$$T = T_{ABC} + T_{CDA} = \frac{72 \cdot 196{,}28 \cdot \sin 72{,}79°}{2} + \frac{146 \cdot 86 \cdot \sin 113°}{2} \approx$$
$$\approx 6749{,}42 + 5778{,}93 \approx 12\,528 \text{ m}^2.$$

II. megoldás. Egészítsük ki az $ABCD$ négyszöget háromszöggé.



Az EDC háromszög ismeretlen szögei:

$$EDC\sphericalangle = 180° - 113° = 67°,$$
$$ECD\sphericalangle = 180° - 116° = 64°,$$
$$DEC\sphericalangle = 180° - (64° + 67°) = 49°.$$

Alkalmazzuk az EDC háromszögben a szinusztételt:

$$\frac{x}{86} = \frac{\sin 64°}{\sin 49°},$$

amiből $x \approx 102{,}42$ (m), és

$$\frac{y}{86} = \frac{\sin 67°}{\sin 49°},$$

ahonnan $y \approx 104{,}89$ (m), így $AE = 146 + x \approx 248{,}42$ (m) és $BE = 72 + y \approx 176{,}89$ (m).

Az $ABCD$ négyszög területe az ABE és CDE háromszögek területének különbsége:

$$T = T_{ABE} - T_{CDE} = \frac{248{,}42 \cdot 176{,}89 \cdot \sin 49°}{2} - \frac{102{,}42 \cdot 104{,}89 \cdot \sin 49°}{2} \approx$$
$$\approx 16\,582{,}25 - 4053{,}9 \approx 12\,528\ \mathrm{m}^2.$$

9. *Egy városban a fiatalok körében vizsgálódtak a futballrajongók és az agresszív viselkedésre hajlamos személyek között. A következőket állapították meg:*

- *Az agresszivitást mutató fiatalok 70%-a futballrajongó.*
- *Az agresszívnek nem mondhatók között csupán 30% futballrajongó van.*
- *A futballrajongók 60%-a mutat agresszivitást.*

a) A város fiataljainak hány százaléka futballrajongó?

b) Mennyire jellemzi a várost a fiatalok agresszivitása?

c) A futballrajongó agresszív fiatalok a mérkőzések kb. 15%-ában okoznak nagyobb rendőrségi problémát. Mekkora annak a valószínűsége, hogy három mérkőzésen is megússza a helyi rendőrség a beavatkozást, ha feltehetjük, hogy az egyes mérkőzéseken kitört botrányok egymástól függetlenek? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* Jelölje A az agresszívek, F pedig a futballrajongók csoportját. Ekkor a feladat szövege alapján: $P(F \mid A) = 0{,}7$, $P(F \mid \overline{A}) = 0{,}3$ és $P(A \mid F) = 0{,}6$, ahol $P(F)$ értékét keressük.

A feltételes valószínűség definíciója alapján

$$P(F \mid A) = \frac{P(FA)}{P(A)} = 0{,}7,$$
$$P(F \mid \overline{A}) = \frac{P(F\overline{A})}{1 - P(A)} = \frac{P(F) - P(FA)}{1 - P(A)} = 0{,}3 \quad \text{és}$$
$$P(A \mid F) = \frac{P(FA)}{P(F)} = 0{,}6.$$

A harmadik egyenletből $P(FA)$ valószínűségét beírva a második egyenletbe

$$\frac{0{,}4P(F)}{1 - P(A)} = 0{,}3.$$

Az első és harmadik egyenletből $0{,}6P(F) = 0{,}7P(A)$, vagyis $P(A) = \frac{6}{7}P(F)$, így

$$\frac{0{,}4P(F)}{1 - \frac{6}{7}P(F)} = 0{,}3, \quad \text{azaz} \quad \frac{2}{5}P(F) = \frac{3}{10} - \frac{9}{35}P(F),$$

ahonnan $\frac{23}{35}P(F) = \frac{3}{10}$, amiből $P(F) = \frac{21}{46} \approx 0{,}46$, tehát a város fiataljainak körülbelül 46%-a futballrajongó.

II. megoldás. Vegyünk 10 agresszív fiatalt, akik közül 7 futballrajongó. Ha n nem agresszív fiatal van, akkor ezek között $0{,}3n$ fő futballrajongó. Viszont a 7 agresszív futballrajongó 60%-a az összes futballrajongónak, vagyis $7 = (7 + 0{,}3n) \cdot 0{,}6 = 4{,}2 + 0{,}18n$, ahonnan $n = \frac{140}{9}$.

Ahhoz, hogy n egész szám legyen, mindent 9-cel kell szorozni, tehát 90 agresszív fiatalból 63 fő futballrajongó, és 140 nem agresszívből 42 fő. E szerint a futballrajongók száma 105, ami a 230-nak kb. 46%-a, ami nyilván független a város lakosságától, hiszen az arány nem változik.

b) $P(A)$ valószínűségét keressük:

$$P(A) = \frac{6}{7} \cdot \frac{21}{46} = \frac{9}{23} \approx 0{,}39,$$

tehát a város fiataljainak kb. 39%-a agresszív.

c) Mivel az egyes mérkőzéseken kitört botrányok egymástól függetlenek, ezért $0{,}85^3 \approx 0{,}61$ annak a valószínűsége, hogy a helyi rendőrség megússza a beavatkozást.