I. rész

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a rendezett valós számpárok halmazán:

a) $$\begin{aligned} x &= 10 - y, \\ y &= 3\sqrt{x}; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \frac{x+3}{4} - \frac{y-2}{3} &= 2, \\ \frac{4}{x+3} + \frac{3}{y-2} &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(*11 pont*)

2. A Fővárosi Nagycirkusz Dima karácsonya című előadása egy kisfiú álmáról szól.

a) Az első felvonásban nyolc műsorszám látható. Dima álmát tegyük változatossá, és legyen minden előadáson eltérő ezeknek a műsorszámoknak a sorrendje. Mennyi ideig játszhatnák így ezt az előadást, ha egy héten nyolcszor láthatja a közönség?

b) Az egyensúlyozó művész nyolc geometriai formát tesz egymásra, és ezeknek a tetejére állva zsonglőrködik. Van három darab egyforma álló hengere, két darab egyforma fekvő hengere és három darab egyforma kettőskúpja. Hányféleképpen rakhatja ezeket egymásra?

c) Az egyik műsorszámban öt oroszlán szerepel. A jelenet második felében már csak három oroszlán marad a porondon, és ez bármelyik három lehet. Hányféleképpen hagyhatják el az oroszlánok a jelenet végén a porondot?

d) Az elefánt számára négy sorszámozott kosárban tíz egyforma almát helyeznek el, amit a műsorszám alatt jutalomként megkap az elefánt. Hányféleképpen lehet az almákat elhelyezni a négy kosárban? (*12 pont*)

3. A matematika dolgozatban egy n pontú teljes gráf éleinek számát kellett meghatározni.

Ügyet Lenke az n oldalú sokszög átlóinak számára vonatkozó képletet használta, és ráadásul az így kapott szám két utolsó számjegyét véletlenül felcserélte. Ügyetlenkedéseinek ellenére helyes végeredményt kapott. Hány pontú gráf szerepelt a dolgozatban? (*14 pont*)

4. Adott a koordinátarendszerben az $e: x - 2y = 0$ egyenes és az $A(14;2)$ pont. Tudjuk, hogy $AC = BC$, ahol C illeszkedik az e egyenes első negyedbe eső részére, B illeszkedik az x tengelyre, és CB párhuzamos az y tengellyel. Adjuk meg a C és B pontok koordinátáit. (*14 pont*)

II. rész

5. Egy feldolgozóüzem adott térfogatú, henger alakú konzervdobozokat szeretne gyártatni.

A dobozoknak a palástja és csak az egyik fedőlapja lesz címkével borítva.Milyen alakú hengert kell terveztetniük, hogy a címkézendő felület a lehető legkisebb legyen? Adjuk meg a henger magassága és a sugara közötti kapcsolatot. (*16 pont*)

6. *a)* Határozzuk meg a $[0;\pi]$-n értelmezett $f(x) = \sin x$ hozzárendeléssel megadott függvény görbéje és az x tengely által határolt síkidom területének közelítő értékét.

A számoláshoz használjuk azt a hétszöget, amelynek csúcsai a függvény görbéjén találhatók a 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$ és π helyeken.

b) Határozzuk meg a $[0;\pi]$-n értelmezett $f(x) = \sin x$ hozzárendeléssel megadott függvény görbéje és az x tengely által határolt síkidom területét. (*16 pont*)

7. Az Öltönyüzletben minden héten kitalálnak egy új akciót, amivel a vásárlók kedvében szeretnének járni.

a) Az egyik héten meghirdették, hogy a 4990 Ft-os ingek közül az elsőt 990 Ft-ért vásárolhatjuk meg, és ezen felül még annyi inget vehetünk 990 Ft-ért, ahányat teljes áron. Beáta, az üzlet öltözködési tanácsadója szerint ezek jó minőségű ingek, ezért László egynél többet szeretne választani magának. Hány darabot vegyen, ha átlagosan a legkevesebbet szeretne fizetni egy ingért?

b) Egy másik alkalommal az üzlet vezetősége két akció közül nem tudott választani, ezért a vásárlóikat kérdezték meg, hogy ők melyiket szeretnék. A beérkezett szavazatok alapján a következő két ajánlat között fognak dönteni:

Egyik lehetőség: Aki két terméket vásárol, az olcsóbbat fél áron kapja.

Másik lehetőség: Aki három terméket vásárol, a legolcsóbbat ingyen kapja.

László a következő termékeket szeretné megvásárolni: öltöny 39 990 Ft, kabát 27 990 Ft, duplagalléros ing 6490 Ft, bőr öv 3990 Ft, selyem nyakkendő 2990 Ft, sportos kordzakó 29 990 Ft.

Adjuk meg a különböző párosítások alapján a lehetséges fizetendő összegeket az első lehetőség szerint.

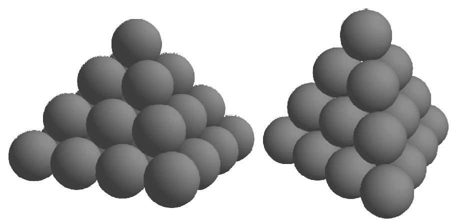
c) Az első akcióra 2103, a másodikra 1542 szavazat érkezett. Kedvező ez Lászlónak? Mekkora és milyen irányú eltérést jelent ez az általa választott termékek kifizetésekor? (Azt feltételezzük, hogy László mindkét lehetőségnél a számára legjobb csoportosításban fizetett volna.) (*16 pont*)

8. Tudjuk, hogy az első n darab négyzetszám összegét az $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ képlet adja, és az n-edik négyzetszám az n^2. Tudjuk, hogy az első n darab háromszögszám összegét az $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ képlet adja, és az n-edik háromszögszám az $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

a) Igazoljuk, hogy az n-edik és az $(n+1)$-edik háromszögszám összege négyzetszám.

b) Igazoljuk, hogy ha az n-edik háromszögszámhoz hozzáadjuk az $(n+1)$-edik háromszorosát, akkor ismét háromszögszámot kapunk.

A zöldséges a mandarinokból négyzet alapú és háromszög alapú, magas piramist épített. (Az *ábra* mutat egy-egy négyrétegű ilyen piramist.)



c) Emőke a négyzet alapú piramis tetejéről megvesz néhány rétegnyi mandarint. Egy heti adagot szeretne vásárolni úgy, hogy minden napra ugyanannyi mandarin jusson. Adjuk meg a darabszámoknak azt a sorozatát, ahány réteg mandarint Emőke megvásárolhat.

d) Ha a megvásárolt mandarinok számát Emőke négyszerezné, akkor kétszer olyan magas háromszög alapú piramist tudna építeni, mint amilyen magas négyzet alapú piramis volt eredetileg. Igazoljuk, hogy ez az észrevétel nem függ attól, hogy a boltban a piramis tetejéről hány réteg mandarint vásárolt meg. (*16 pont*)

9. *a*) Az 5 dm-szer 12 dm-es téglalap hosszabb oldala a vízszintes síkra illeszkedik, két csúcsa pedig 3 dm magasan van a sík fölött. Ezen a téglalapon egy hangya mászik a hosszabb oldalra merőlegesen felfelé. Mennyivel lenne kisebb az útvonalának a vízszintessel bezárt hajlásszöge, ha a téglalap átlóján mászna felfelé?

b) Igazoljuk, hogy ha a, b és c egy háromszög oldalainak a hossza, α, β és γ pedig a megfelelő szögeinek a nagysága, akkor:

$$b^3c\cdot\cos\alpha+c^3a\cdot\cos\beta+a^3b\cdot\cos\gamma=c^3b\cdot\cos\alpha+a^3c\cdot\cos\beta+b^3a\cdot\cos\gamma.$$

(*16 pont*)