1. Bevezetés

Csebisev a 19. század egyik legnagyobb orosz matematikusa volt, nevéhez több tétel is fűződik. Például ha $n > 1$ egy természetes szám, akkor n és $2n$ között mindig található legalább egy prímszám. Ebben a cikkben Csebisev *algebrai* egyenlőtlenségét járjuk körül (amellyel a magyar középiskolai szakköri oktatás is többször foglalkozott). Az egyenlőtlenség érdekes alkalmazásaként több közgazdaságtani egyenlőtlenség is adódik. Itt egy új nyugdíjgazdaságtani egyenlőtlenséget mutatunk be, s a két oldal közti különbséget konkrét magyar adatokkal szemléltetjük.

2. Csebisev algebrai egyenlőtlensége

Kiindulópontunk a következő elemi megfigyelés.

1. segédtétel. *Ha $0 < x_1 < x_2$ és $0 < y_1 < y_2$ két valós számpár, akkor*

$$x_1y_1 + x_2y_2 > x_1y_2 + x_2y_1.$$

Bizonyítás. Valóban, rendezéssel adódik $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) > 0$, s ez a feltevés szerint teljesül. □

Ebből a segédtételből levezethető cikkünk központi egyenlőtlensége.

1. tétel (Csebisev algebrai egyenlőtlensége, 1882). *Legyen $n > 1$ egy természetes szám, valamint $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ és $0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ két valós számsorozat. Ekkor fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

Megjegyzés. Ha van olyan i index, amelyre $a_i < a_{i+1}$ és $b_i < b_{i+1}$ egyszerre teljesül, akkor az egyenlőtlenség is szigorú.

Bizonyítás. Írjuk föl az első sorban álló egyenlőség mellé a segédtételből következő $n - 1$ egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n,\\
a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n &\geq a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_nb_1,\\
&\vdots\quad \vdots\\
a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n &\geq a_1b_n + a_2b_1 + \ldots + a_nb_{n-1}.
\end{aligned}$$

Összeadva őket, adódik a nevezett egyenlőtlenség. □

Létezik az egyenlőtlenségnek egy olyan változata, amely explicit alakban megadja az eltérést (itt a szumma az összegzés jele):

$$\begin{aligned}
n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) =\\
= \frac{1}{2}\sum_i \sum_j (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0.
\end{aligned}$$

A valószínűségi alkalmazásban kézenfekvő a Csebisev-egyenlőtlenséget átlagokra felírni. Tegyük föl, hogy egy-egy véletlen változó értéke $1/n$ valószínűséggel veszi föl a_i-t és b_i-t, ahol (a_i) és (b_i) nem szigorúan növekvő pozitív sorozat. Ekkor a szorzat átlaga legalább akkora, mint az átlagok szorzata:

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

Az egyenlőtlenség érdekes alkalmazásaként kitűzzük a következő feladatot (a megoldás a cikk végén található).

1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy n pozitív szám négyzetes közepe legalább akkora, mint a számtani közepük:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Megemlítjük, hogy a hibaszámításban az átlagos hibát éppen a négyzetes középpel számoljuk.

3. Egy új közgazdasági alkalmazás

Egy modern állam költségvetési kiadásainak jelentős része a nyugdíjrendszerrel kapcsolatos. Első közelítésben egy adott évjárat nyugdíjkiadása az átlagos nyugdíj és a nyugdíjban töltött átlagos idő szorzata. Pontosabb becslésben azonban az átlagok mellett a két változó eloszlását is figyelembe kell vennünk. A Csebisev-egyenlőtlenséget alkalmazva azt mutatjuk meg, hogy az átlagokkal való számítás alábecsüli e kiadásokat. Megjegyezzük, hogy jelenleg Magyarországon nem ez a legerősebb alábecslési ok, de jelentősége a nyugdíjak és a várható élettartamok várható polarizálódása miatt egyre fokozódik.

Fordítsuk le matematikai nyelvre a problémát: osszuk a népességet $n > 1$ csoportra, s legyen az i-edik csoport tagjainak az időben változatlan reálértékű éves átlagos nyugdíja b_i, szigorúan növekvő sorrendben; a nyugdíjban töltött átlagos ideje a_i. Tapasztalati megfigyelések és logikai érvelés alapján igaz, hogy nagyobb csoport-nyugdíjhoz hosszabb nyugdíjban töltött idő tartozik. A statisztikai alkalmazhatóság miatt azonban nem lehet túlzottan kis csoportokat képezni. Mivel a nők jóval kisebb nyugdíjat kapnak és átlagosan tovább élnek, mint a férfiak, szét kellett a két nemet választani. Érdekes módon a nőknél alig van élettartambeli különbség, és a monotonitás sem teljesül. Ezért a továbbiakban csak a férfiaknak fizetett nyugdíjkiadással foglalkozunk.

Az egy férfi nyugdíjasra jutó átlagos nyugdíjkiadás

$$E = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}.$$

Mint említettük, gyakori közelítés, hogy E helyett az átlagos nyugdíjban töltött idő és az átlagos nyugdíj szorzatával becslik meg a nyugdíjkiadást:

$$\widehat{E} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\,\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

Csebisev tétele szerint $E \geq \widehat{E}$.

Kérdés: mekkora az alábecslés mértéke? A relatív hiba a csoportok nyugdíjban töltött átlagos idejének és átlagos nyugdíjának a heterogenitásától függ.

A hazai nyugdíjak és a 60 éves korban várható élettartam 4-elemű eloszlásáról vannak megbízható adataink. Molnár D. és Hollósné-Marosi (2015) adatai és szóbeli közlése szerint a 2012-ben elhunyt magyar férfi – négy egyenlő részre vágott osztályos – adatai a következők.

1. táblázat. Férfi nyugdíj- és várható élettartam 60 éves korban, 2012

Nyugdíjosztály i	Relatív nyugdíj b_i	Várható élettartam 60 éves korban a_i
1	61,9	17,1
2	81,1	18,3
3	105,0	19,5
4	152,0	21,1
Átlag	100	19,0

Egyszerű számolással adódik, hogy a közelítés relatív hibája −2,5%.

Az 1. feladat megoldása. Legyen $b_1 = a_1, \ldots, b_n = a_n$, és alkalmazzuk a Csebisev egyenlőtlenséget a nevezett egyenlőtlenség négyzetére. Figyeljük meg, hogy a két sorozat azonossága miatt a feltevés nem megszorító, megfelelő indexeléssel mindig elérhető.

Irodalom

Csebisev, P. (1882): Bizonyos integrálok más integrálokkal való közelítése (oroszul), *a Harkovi Cári Egyetem Közleményei*, **2**, 93–98.

Molnár D. L. és Hollósné Marosi J. (2015): Az öregségi nyugdíjasok halandósága, *Közgazdasági Szemle* **62**, 1258–1290.