1. *Legyenek $1 \leq k \leq n$ egészek. Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak legfeljebb hány k elemű részhalmaza adható meg úgy, hogy közülük bármely kettő valamelyike a kettejük uniójának k legkisebb eleméből álljon?*

Megoldás. Legyen $\mathcal{H}$ a feladatban leírt tulajdonságú részhalmazok egy rendszere, és legyenek A és B a $\mathcal{H}$ különböző tagjai. Tegyük fel, hogy az $A \cup B$ halmaz k legkisebb eleme az A halmazt alkotja. Tekintettel arra, hogy $|A \cup B| > k$, az $A \cup B$ halmaz legnagyobb eleme nem tartozik A-hoz. Ezért ez az elem B-hez tartozik, ilyenformán a $\mathcal{H}$ halmazcsalád tagjainak legnagyobb elemei páronként különbözők. A $\mathcal{H}$ halmazcsaládhoz tehát legfeljebb annyi halmaz tartozhat, mint ahányféle az $1, 2, \ldots, n$ hamaz egy k elemű részhalmazának a legnagyobb eleme lehet. Világos, hogy az $1, 2, \ldots, k-1$ számok egyike sem lehet egy ilyen k elemű részhalmaz legnagyobb eleme, ezért a feladatban kérdezett részhalmazok száma legfeljebb a $\{k, k+1, \ldots, n\}$ halmaz számossága, azaz legfeljebb $n - (k-1) = n - k + 1$ lehet.

Annak igazolására, hogy ez a felső korlát elérhető, elegendő azt észrevenni, hogy az $A_i := \{j \in \mathbb{N} \colon i \leq j \leq i+k-1\}$ halmazok rendelkeznek a feladatban leírt tulajdonsággal, ha $i \in \{1, 2, \ldots, n-k+1\}$. Ezzel pedig pontosan $n-k+1$ halmazt adtunk meg, a feladat kérdésére a válasz tehát $n-k+1$. $\square$

Megjegyzés. Maximális méretű halmazcsaládra egy, a fentitől különböző példa $i \in \{k, k+1, \ldots, n\}$ esetén az $\{1, 2, \ldots, k-1, i\}$ halmazok rendszere.

2. *Bizonyítsuk be, hogy pozitív egész számok tetszőleges véges A halmazának van olyan B részhalmaza, amelyre fennáll az alábbi két feltétel.*

- *Ha b_1 és b_2 a B különböző elemei, akkor sem b_1 és b_2, sem pedig $b_1 + 1$ és $b_2 + 1$ nem egymás többszörösei, továbbá*
- *az A halmaz tetszőleges a eleméhez van B-nek olyan b eleme, amelyre a osztója b-nek vagy $(b+1)$ osztója $(a+1)$-nek.*

I. megoldás. A megoldás során az alábbi szóhasználattal élünk. Azt mondjuk, hogy a b pozitív egész az a pozitív egészet *felülről dominálja,* ha a osztója b-nek, és *alulról dominálja,* ha $b+1$ osztója $(a+1)$-nek. (Minden pozitív egész tehát felülről és alulról is dominálja önmagát.) A b egész akkor *dominálja* a-t, ha b felülről vagy alulról dominálja a-t. Az X halmaz pedig akkor *dominálja* az Y halmazt, ha Y minden y eleméhez található olyan x az X-ből, amely dominálja y-t. Végül, pozitív egészek egy Z halmazát akkor nevezzük *függetlennek,* ha Z egyetlen eleme sem dominálja Z egy másik elemét. Az imént bevezetett terminológia segítségével a feladat állítása úgy fogalmazható meg, hogy a pozitív egészek minden véges A halmazának van olyan független B részhalmaza, amely dominálja A-t.

Tekintsük az A halmaz mindazon C részhalmazait, melyekre

(a) C független, másfelől

(b) ha A valamely x eleme alulról dominálja C egy elemét, akkor C felülről dominálja x-et.

Létezik a fenti tulajdonságokat teljesítő C halmaz, hisz az üreshalmaz például ilyen. Válasszuk a B halmazt ezen C halmazok közül úgy, hogy B a lehető legtöbb elemét dominálja felülről az A halmazban. Azt állítjuk, hogy egy eképpen választott B halmaz rendelkezik a feladatban előírt tulajdonságokkal. Mivel B-t függetlennek választottuk, ezért csupán azt kell igazolni, hogy B dominálja a teljes A halmazt. Indirekt módon bizonyítunk, tegyük fel, hogy B mégsem dominálja A-t.

Legyen tehát a az A halmaz legkisebb olyan eleme, amit B nem dominál, és legyen $B' := B \setminus D(a) \cup \{a\}$, ahol $D(a)$ az a osztóinak halmazát jelöli. Megmutatjuk, hogy B választásának ellentmondva a B' halmaz amellett, hogy több elemet dominál felülről, mint B, teljesíti az (a) és (b) tulajdonságokat is.

A konstrukcióból adódóan B' az A halmaz minden olyan elemét felülről dominálja, amely elemeket B felülről dominál, és ezen túl B' felülről dominálja a-t is. Ezért B' több elemet dominál felülről, mint B. A B részhalmazaként $B' \setminus \{a\}$ független, továbbá az a választásából adódóan $B' \setminus \{a\}$ nem dominálja a-t. Sőt, a sem dominálja $B' \setminus \{a\}$ egyetlen elemét sem: alulról a B halmaz (b) tulajdonsága miatt, felülről pedig B' definíciójából adódóan. Ezért a B' halmaz csakugyan független.

Végül, a (b) tulajdonság igazolásához indirekt módon tegyük fel, hogy x alulról dominálja B' egy y elemét. Ha mármost $y \in B$, akkor a (b) tulajdonság miatt B felülről dominálja x-et, így B' is, tehát teljesül a (b) tulajdonság. Ha pedig $y \notin B$, akkor $y = a$ és az alulról történő dominálás miatt $x < y$. Mivel a az A halmaz legkisebb olyan eleme, amit B nem dominál, ezért B dominálja x-et. Ha B felülről dominálja x-et, akkor B' is felülről dominálja x-et, a (b) tulajdonság teljesül. Ha pedig B egy z eleme alulról dominálja x-et, akkor mivel x alulról dominálja a-t, z is alulról dominálja a-t. Ez azt jelenti, hogy B mégiscsak dominálja a-t, ellentétben az a választásával. A kapott ellentmondás pedig azt igazolja, hogy B'-re teljesül a (b) tulajdonság, és ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

II. megoldás. Az I. megoldásban bevezetett szóhasználatot tovább bővítjük. Pozitív egészek egy véges H halmaza *tetejének* nevezzük azt a $H^{\uparrow}$ halmazt, melyet H mindazon h elemei alkotnak, amelyet nem dominál felülről a H egyetlen h-tól különböző eleme sem. Hasonlóan, a H halmaz $H^{\downarrow}$-val jelölt *alja* a H azon h elemeiből áll, amelyet a H-nak h-tól különböző eleme nem dominál alulról. Világos, hogy $H^{\uparrow}$ felülről, $H^{\downarrow}$ pedig alulról dominálja H-t, továbbá, hogy H tetejének egyik eleme sem dominálja H tetejének egy másik elemét felülről, illetve H aljának egyetlen eleme sem dominálja H aljának egy másik elemét alulról.

Szükségünk lesz még az alábbi megfigyelésre. Ha egy X halmaz alulról dominálja az Y halmazt, továbbá az Y alulról dominálja Z-t, akkor X is alulról dominálja Z-t. Legyen ugyanis $z \in Z$ tetszőleges. Az Y és Z viszonya folytán létezik olyan $y \in Y$, amelyre $y+1$ osztója $(z+1)$-nek. Mivel X alulról dominálja Y-t, ezért X-nek van olyan x eleme, amelyre $x+1$ osztja $(y+1)$-et. Ám ekkor $x+1$ osztója $(z+1)$-nek is, azaz X alulról dominálja Z minden elemét.

A továbbiakban megadunk egy véges eljárást, amely tetszőleges A halmazhoz talál egy, a feladatban megkívánt tulajdonságokkal rendelkező B részhalmazt. Legyen

$$A_0 := A, \quad B_0 := A_0^{\uparrow} \quad \text{és} \quad X_0 := B_0 \setminus B_0^{\downarrow}.$$

Ha már meghatároztuk az A_i, B_i és X_i halmazokat, akkor legyen

$$A_{i+1} := A_i \setminus X_i, \quad B_{i+1} := A_{i+1}^{\uparrow} \quad \text{és} \quad X_{i+1} := B_{i+1} \setminus B_{i+1}^{\downarrow}.$$

Figyeljük meg, hogy B_{i+1} az A_{i+1} teteje lévén felülről dominálja A_{i+1}-et és a $B_i^{\downarrow}$ alulról dominálja B_i-t, így X_i-t is. Ugyancsak a definícióból adódóan $B_i^{\downarrow} = B_i \setminus X_i \subseteq B_{i+1}$, ezért B_{i+1} alulról dominálja $B_i^{\downarrow}$-t, így a $B_i^{\downarrow}$ által alulról dominált X_i-t is. Világos, hogy $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, így az A halmaz végessége miatt $A_k = A_{k+1}$ teljesül valamely k-ra. Ez azt jelenti, hogy $X_k = \emptyset$, azaz $B_k = B_k^{\downarrow}$. Mivel $B_k^{\uparrow} = \left(A_k^{\uparrow}\right)^{\uparrow} = A_k^{\uparrow} = B_k$, ezért B_k független.

Megmutatjuk, hogy a $B = B_k$ halmaz megfelel a feladat feltételeinek. Láttuk, hogy B_k független, így csupán azt kell bizonyítanunk, hogy A-t is dominálja. Korábban láttuk, hogy B_k az A_k-t felülről dominálja. Elegendő tehát annyit bizonyítani, hogy B_k alulról dominálja az $A \setminus A_k = X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_{k-1}$ halmazt. Láttuk azt is, hogy B_k alulról dominálja az X_{k-1} halmazt. Mivel $B_{k-1} \subseteq B_k \cup X_{k-1}$, ezért B_k a B_{k-1}-et is alulról dominálja. Hasonlóan, B_{k-1} alulról dominálja X_{k-2}-t, így B_{k-2}-t is, tehát B_k is alulról dominálja B_{k-2}-t. Ugyanez az érvelés mutatja, hogy B_k alulról dominálja X_i-t és B_i-t minden $0 \le i \le k$-ra. Mindezt összevetve kapjuk, hogy B_k alulról dominálja az $X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_{k-1}$ halmazt. Ezzel pedig beláttuk, hogy a $B = B_k$ halmaz rendelkezik a feladatban leírt tulajdonsággal. $\square$

3. *Igaz-e, hogy ha $p(x)$ és $q(x)$ olyan valós együtthatós polinomok, melyekre $p\big(p(x)\big) = q(x)^2$ teljesül minden valós x-re, akkor létezik olyan valós együtthatós $r(x)$ polinom, amelyre $p(x) = r(x)^2$ teljesül minden valós x-re?*

I. megoldás. Ha a $p(x)$ polinom konstans, akkor $p\big(p(x)\big) = p(x) = q(x)^2$, így $r(x) = q(x)$ megfelelő választás. Megmutatjuk, hogy a kérdésre igenlő a válasz akkor is, ha a p polinom legalább elsőfokú, amit a továbbiakban felteszünk. A bizonyításhoz felhasználjuk a komplex számkört és az algebra alaptételét. Konkrétan azt, hogy ha $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$, akkor léteznek olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ komplex számok, melyekre

$$p(x) = a_k \cdot (x-\alpha_1) \cdot (x-\alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_k) \tag{1}$$

teljesül, továbbá ez az ú.n. kanonikus alak az $(x-\alpha_i)$ gyöktényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű. Világos, hogy a fenti α_i számok a polinom gyökei, továbbá, mivel a $p(x)$ polinom valós együtthatós, ha α_i gyöke $p(x)$-nek, akkor annak $\overline{\alpha_i}$ is gyöke lesz, ráadásul e két gyök multiplicitása megegyezik, hiszen ha α_i nem valós, akkor

$$\frac{p(x)}{(x-\alpha_i)(x-\overline{\alpha_i})} = \frac{p(x)}{\left(x^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha_i) \cdot x + |\alpha_i|^2\right)}$$

valós együtthatós polinomok hányadosaként maga is valós együtthatós. Ezért pontosan akkor létezik olyan valós együtthatós $r(x)$ polinom, amelyre $p(x) = r(x)^2$, ha az a_k főegyüttható nemnegatív, valamint $p(x)$ fenti kanonikus alakjában minden $(x-\alpha_i)$ gyöktényező páros sokszor fordul elő.

Az algebra alaptétele szerint tehát a kompozíciópolinom előáll

$$p\big(p(x)\big) = a_k \cdot \big(p(x)-\alpha_1\big) \cdot \big(p(x)-\alpha_2\big) \cdot \ldots \cdot \big(p(x)-\alpha_k\big) \tag{2}$$

alakban. Mivel $p\big(p(x)\big) = q(x)^2$, ezért fokszámaik megegyeznek: $p\big(p(x)\big)$-é k^2, $q(x)^2$-é pedig páros. Így $deg\big(p(x)\big) = k$ is páros. Az is látszik a (2) alapján, hogy $p\big(p(x)\big)$ főegyütthatója a_k^{k+1}, és ez megegyezik $q(x)^2$ pozitív főegyütthatójával. Ezért $a_k^{k+1} > 0$. Mivel $k+1$ páratlan, innen $a_k > 0$ adódik.

Figyeljük meg továbbá, hogy $p\big(p(x)\big)$ kanonikus alakja megkapható úgy, hogy a (2) szorzatban minden nemkonstans tényezőt helyettesítünk az adott tényezőnek a k gyöktényezőt tartalmazó kanonikus alakjával, azaz $\big(p(x)-\alpha_i\big)$-t egy

$$p(x) - \alpha_i = a_k \cdot (x-\alpha_{i,1}) \cdot (x-\alpha_{i,2}) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_{i,k})$$

polinommal. A konstrukcióból világos, hogy $p(\alpha_{i,j}) = \alpha_i$, ezért $\alpha_i \neq \alpha_{i'}$ esetén $\alpha_{i,j} \neq \alpha_{i',j'}$ adódik. Azaz $p\big(p(x)\big)$ kanonikus alakjában egy $(x-\alpha_{i,j})$ gyöktényező előfordulásainak száma megegyezik az (1) kanonikus alakjában az $(x-\alpha_i)$ előfordulásai számának és a $p(x)-\alpha_i$ polinom kanonikus alakjában az $(x-\alpha_{i,j})$ gyöktényező előfordulásai számának szorzatával. A $p\big(p(x)\big) = q(x)^2$ azonosság miatt tehát minden ilyen $(x-\alpha_{i,j})$ gyöktényező páros sokszor fordul elő $p\big(p(x)\big)$ kanonikus alakjában.

A feladat kérdésére adott igenlő válasz igazolásához elegendő megmutatni, hogy az (1) kanonikus alakban minden $(x-\alpha_i)$ gyöktényező páros sokszor fordul elő. Ezt indirekt módon bizonyítjuk: tegyük fel, hogy valamely $(x-\alpha_i)$ gyöktényező multiplicitása páratlan. Tekintettel arra, hogy a $p\big(p(x)\big)$ polinom fokszáma k^2, és a $p\big(p(x)\big) = q(x)^2$ azonosság miatt k^2 páros, a $p(x)$ polinom k fokszámának is párosnak kell lennie. Ez viszont azt jelenti, hogy az (1) kanonikus alakban a páratlan multiplicitású gyöktényezők száma páros. Létezik tehát egy $\alpha_{i'} \neq \alpha_i$ gyök, amelyre az $(x-\alpha_{i'})$ gyöktényező is páratlan sokszor fordul elő az (1) alakban. A fenti megfigyelésünk szerint tehát mind a $p(x)-\alpha_i$, mind a $p(x)-\alpha_{i'}$ polinomok kanonikus alakja olyan, hogy azokban minden gyöktényező páros sokszor fordul elő. Más szóval, léteznek olyan $r_1(x)$ és $r_2(x)$ polinomok, melyekre

$$p(x)-\alpha_i = r_1(x)^2 \qquad \text{és} \qquad p(x)-\alpha_{i'} = r_2(x)^2. \tag{3}$$

Ezek szerint

$$\begin{aligned}\alpha_{i'}-\alpha_i &= \big(p(x)-\alpha_i\big)-\big(p(x)-\alpha_{i'}\big) = r_1(x)^2 - r_2(x)^2 = \\ &= \big(r_1(x)+r_2(x)\big)\cdot\big(r_1(x)-r_2(x)\big).\end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy a bal oldalon található konstans előáll két polinom szorzataként, vagyis mind $r_1(x)+r_2(x)$, mind $r_1(x)-r_2(x)$ konstans polinomok. Ekkor azonban ezek összege, $r_1(x)+r_2(x)+r_1(x)-r_2(x) = 2\cdot r_1(x)$ is konstans polinom, tehát (3) alapján $p(x) = r_1(x)^2 - \alpha_i$ is konstans, ami ellentmond a kezdeti feltevésünknek. Ezzel pedig kétséget kizáróan igazoltuk a feladat kérdésére adott igenlő választ. $\square$

II. megoldás. Meg fogjuk mutatni, hogy a megadott feltételek mellett mindig létezik olyan r valós együtthatós polinom, melyre $p(x) = r(x)^2$.

Ha $p\big(p(x)\big) = q(x)^2$, akkor $(\deg p)^2 = 2\deg q$, és így a p polinom foka páros. Továbbá p főegyütthatója pozitív, különben a ∞-ben $p\big(p(x)\big)$, és így $q(x)^2$ határértéke is negatív lenne. Legyen tehát $p(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, ahol n nemnegatív egész szám és $a_{2n} > 0$. Megmutatjuk hogy léteznek olyan r és s valós együtthatós polinomok, melyekre $p(x) = r(x)^2 + s(x)$ és $\deg s < n$. Mivel egy ilyen r polinom foka csak n lehet, keressük r-et $r(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0$ alakban. Akkor kapunk megfelelő előállítást, ha $p(x)$-ben és $r(x)^2$-ben minden $n \le j \le 2n$-re megegyezik x^j együtthatója. Ha b_i értékét $i = n, n-1, \ldots, 0$ sorrendben választjuk meg, akkor b_i megfelelő választásával elérhető, hogy x^{n+i} együtthatója egyezzen. Legyen ugyanis $b_n = \sqrt{a_{2n}}$, ekkor x^{2n} együtthatója egyezik. Tegyük fel, hogy $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_{i+1}$ értékét már rögzítettük. Mivel $r(x)^2$-ben x^{n+i} együtthatója $\sum\limits_{i\le k\le n} b_kb_{n+i-k}$, így

$$b_i = \frac{a_{n+i} - \sum_{i<k<n} b_kb_{n+i-k}}{2b_n}$$

választással x^{n+i} együtthatója éppen a_{n+i} lesz $r(x)^2$-ben is. Az így megválasztott n-edfokú $r(x)$ polinomra valóban n-nél kisebb fokú lesz az $s(x) = p(x) - r(x)^2$ polinom.

Mivel $q(x)^2 = p\big(p(x)\big) = r\big(p(x)\big)^2 + s\big(p(x)\big)$, ezért

$$s\big(p(x)\big) = q(x)^2 - r\big(p(x)\big)^2 = \big[q(x) + r\big(p(x)\big)\big]\cdot\big[q(x) - r\big(p(x)\big)\big].$$

Az $s\big(p(x)\big)$ polinom foka s és p fokának szorzata, és így kisebb, mint $2n^2$. Ha $s \not\equiv 0$, akkor ebből az is következik, hogy a $q(x) + r\big(p(x)\big)$ és $q(x) - r\big(p(x)\big)$ polinomok foka is kisebb, mint $2n^2$. Ekkor viszont

$$q(x) = \frac{q(x) + r\big(p(x)\big) + q(x) - r\big(p(x)\big)}{2}$$

foka is $2n^2$-nél kisebb lenne, ami ellentmondás, hiszen $\deg q = \dfrac{(\deg p)^2}{2} = 2n^2$. Mindez azt jelenti, hogy $s \equiv 0$, és így $p(x) = r(x)^2$. $\square$

Megjegyzés. Williams Kada megjegyzése nyomán könnyen látható, hogy az I. megoldás módszerével igazolható a kitűzött feladat azon általánosítása, mely szerint ha valamely valós együtthatós $p(x)$ és $q(x)$ polinomokra, illetve $k \ge 2$ prímszámra $p\big(p(x)\big) = q(x)^k$ teljesül, akkor van olyan valós együtthatós $r(x)$ polinom, amelyre $p(x) = r(x)^k$ áll fenn.