I. megoldás. Deriváljuk az azonosság mindkét oldalát! (Ez sin nx folytonosan deriválhatósága alapján megtehető.) Így kapjuk az

$$n \cdot \cos nx = -P_n'(\cos x) \cdot \sin^2 x + P_n(\cos x) \cdot \cos x$$

újabb azonosságot, melybe $x = 0$-t helyettesítve adódik az állítás.

II. megoldás. Az azonosság mindkét oldalát nx-szel osztva kapjuk, hogy tetszőleges $x \neq 0$ esetén

$$\frac{\sin nx}{nx} = \frac{P_n(\cos x)}{n} \cdot \frac{\sin x}{x}.$$

Tartsunk x-szel 0-hoz, a két oldal határértéke nyilván megegyezik. Felhasználva P_n folytonosságát és a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ összefüggést, kapjuk, hogy $1 = \dfrac{P(1)}{n}$.

III. megoldás. A bizonyítandó állítást n szerinti teljes indukcióval látjuk be. $n = 1$-re P_1 nyilvánvalóan az azonosan 1 polinom, így ekkor a megfelelő állítás teljesül.

Tegyük fel, hogy $P_n(1) = n$ igaz. Felhasználva a

$$\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x$$

azonosságot, azt kapjuk, hogy

$$P_{n+1}(\cos x) \cdot \sin x = P_n(\cos x) \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos nx \sin x,$$

azaz $x \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ esetén

$$P_{n+1}(\cos x) = P_n(\cos x) = P_n(\cos x) \cdot \cos nx.$$

E kapott azonosság mindkét oldala folytonos, így az $x \to 0$ határátmenettel $P_{n+1}(1) = P_n(1) + 1$ adódik. Felhasználva az indukciós feltevést, azt kapjuk, hogy $P_{n+1}(1) = n + 1$. Ezzel az állítást beláttuk.