

## 7. Egy geometriai nagyágyú

Az eddigi temérdek analízis és algebra után következzen most egy geometriai okoskodás, amelynek ötlete a [10] cikkből származik és egy – a versenyfeladatokon edződtek számára vélhetően jól ismert – nevezetes geometriai egyenlőtlenségre támaszkodik. (Az alábbiakban kissé pongyolán sokszög oldalának mérőszáma helyett egyszerűen az oldalról fogunk beszélni.)

**7.1. tétel** (Ptolemaiosz-egyenlőtlenség) *A síkon bármely konvex négyszögben a szemközti oldalak szorzatának összege legalább akkora, mint az átlók szorzata. Egyenlőség csakis húrnégyszögben teljesül.*

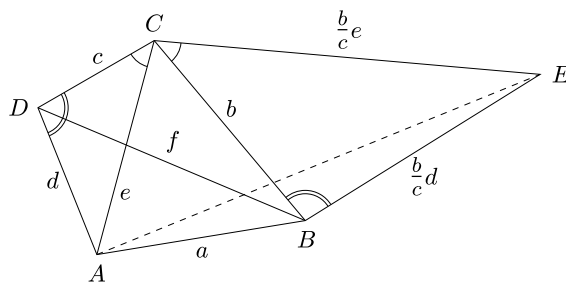
**Bizonyítás.** Tekintsük a 9. ábrán látható  $ABCD$  konvex négyszöget, amelynek oldalai  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ , az átlói pedig  $AC = e$ ,  $BD = f$ . Ekkor azt kell igazolnunk, hogy

$$ac + bd \geq ef.$$

Emeljünk a  $BC$  oldalra a  $CDA$  háromszöggel hasonló  $CBE$  háromszöget úgy, hogy  $ACD \sphericalangle = ECB \sphericalangle$  és  $CDA \sphericalangle = CBE \sphericalangle$  (más szóval alkalmazzunk  $C$  középpontú forgatva nyújtást az  $ACD$  háromszögre úgy, hogy  $CD$  képe  $CB$  legyen). A hasonlóság aránya  $CB/CD = b/c$ , ezért  $CE = \frac{b}{c}e$  és  $BE = \frac{b}{c}d$ . Vegyük észre, hogy ekkor a  $CAE$  és  $CDB$  háromszögek szintén hasonlóak, mert  $BCD \sphericalangle = ECA \sphericalangle$  és  $CE/CB = CA/CD = e/c$ . Következésképpen  $AE/DB = e/c$ , vagyis  $AE = \frac{e}{c}f$ . Mivel az  $ABE$  háromszögben az  $AB$  és  $BE$  oldalak összege legalább akkora, mint  $AE$ , így

$$a + \frac{b}{c}d \geq \frac{e}{c}f,$$

amiből  $c$ -vel való beszorzás után éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség adódik. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha az  $ABE$  háromszög elfajul, azaz  $ABC \sphericalangle + CBE \sphericalangle = 180^\circ$ . Ez azt jelenti, hogy az  $ABCD$  négyszögben a  $B$  és  $D$  csúcsonál lévő belső szögek összege  $180^\circ$ , tehát  $ABCD$  húrnégyszög.  $\square$



9. ábra

**7.2. történeti megjegyzés.** Klaudiosz Ptolemaiosz a Kr. e. II. századi Alexandriában élt matematikus, csillagász, földrajztudós, a geocentrikus – a Földet a világegyetem középpontjának tekintő – világkép megalkotója. Az *Almagest* című műve az ókori csillagászat legfontosabb tudományos forrása, amely a benne található trigonometriai számítások szempontjából is kiemelkedő jelentőségű. Ebben igazolta Ptolemaiosz többek között azt, hogy húrnégyszögben az átlók szorzata a szemközti oldalak szorzatainak összege.

**7.3. megjegyzés.** E kicsit talán hosszabb lélegzetvételűre nyúló megjegyzésben a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség bizonyítása kapcsán hívjuk fel a figyelmet néhány észrevételre, általánosításra. Első olvasáskor nyugodtan a hómegzős feladat megoldásához lehet ugrani.

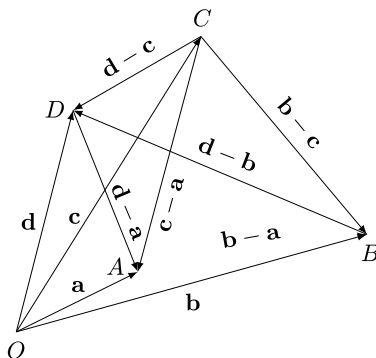
Az előbbi bizonyítás apró finomításával nem nehéz igazolni (lásd [5, 12.14. feladat]), hogy tetszőleges  $A, B, C, D$  síkbeli pontnégyesre igaz

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD,$$

ahol egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a négy pont egy körön (vagy egyenesen) helyezkedik el és azon az  $AC$  pontpár elválasztja a  $BD$  pontpárt. Sőt, megmutatható, hogy bármely nem egy síkban fekvő pontnégyes esetén szigorú egyenlőtlenség áll fenn (erről lásd a [12] könyv 5.8. szakaszát).

A Ptolemaiosz-egyenlőtlenségnek a fentitől különböző, a Simson-egyenes bizonyos tulajdonságára épülő bizonyítása olvasható a [2] könyvben. Számos feladat között böngészhetünk a [6] írásban, ahol az egyenlőtlenség egy általánosítása – a Casey-tétel, amelyben a csúcok szerepét érintő körök, az oldalakét pedig érintők veszik át – ugyancsak terítékre kerül.

Végül nem tudunk ellenállni a kísértésnek, hogy röviden szót ejtsünk a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség komplex számok segítségével történő igen elegáns igazolásáról. Tekintsük az  $A, B, C, D$  pontoknak megfelelő  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  komplex számokat a komplex számsíkon (lásd 10. ábra), azaz például  $\mathbf{a} = a_1 + a_2i$ , ahol  $a_1$  a valós,  $a_2$  pedig a képzetes rész.



10. ábra

A komplex számok közötti szorzás a valós számok szorzásához hasonlóan viselkedik  $i^2 = -1$  figyelembevételével:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 + a_2i)(b_1 + b_2i) = a_1b_1 - a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i.$$

Induljunk ki most a könnyen ellenőrizhető

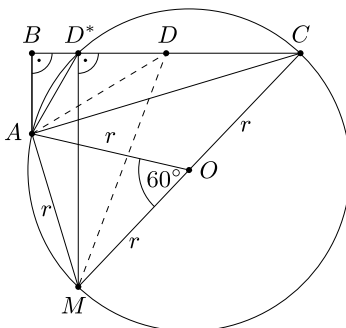
$$(7.1) \quad (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{d}) = (\mathbf{a} - \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) + (\mathbf{d} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

azonosságból. Vegyük észre (ismét lásd a 10. ábrát), hogy  $\mathbf{a} - \mathbf{c}$  és  $\mathbf{b} - \mathbf{d}$  az  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{DB}$  átlóvektorok, továbbá  $\mathbf{a} - \mathbf{d}$  és  $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ , illetve  $\mathbf{d} - \mathbf{c}$  és  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  rendre a  $\overrightarrow{DA}$  és  $\overrightarrow{CB}$ , illetve  $\overrightarrow{CD}$  és  $\overrightarrow{AB}$  szemközti oldalvektorok. Ekkor (7.1) mindkét oldalán abszolút értékét véve, majd alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$|\mathbf{a} - \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b} - \mathbf{d}| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{b} - \mathbf{c}| + |\mathbf{d} - \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b} - \mathbf{a}|,$$

ami éppen a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség. Az egyenlőség esetét egyáltalán nem nyilvánvaló kiolvasni a bizonyításból, ebben az úgynevezett kettősviszony segíthet, bővebben lásd például [11, 31. feladat], [12, 12.5. szakasz], ahol a komplex számok egyéb geometriai alkalmazásáról is olvashatunk.

**A hómezős feladat megoldása.** Ennyi előkészület után térjünk vissza a hómezős feladat megoldására, most a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség segítségével. Tekintsük a 11. ábrát, ahol legyen  $D^*$  a  $BC$  szakasz azon pontja, amelyre  $\angle BAD^* = 30^\circ$  (a korábbiak fényében tudjuk, hogy ez fogja adni a minimumot). Rajzoljuk meg az  $A$ ,  $D^*$  és  $C$  pontokon átmenő kört, amelynek középpontja legyen  $O$ , sugara pedig  $r$ , és a  $D^*$  pontban a  $BC$  szakaszra állított merőleges egyenes messe a kört az  $M$  pontban.



11. ábra

A Thalész-tétel miatt ekkor  $MC$  átmérő a körben, tehát  $MC = 2r$ . Másrészt a kerületi és középponti szögek tétele miatt

$$\angle MOA = 2\angle MD^*A = 2\angle BAD^* = 60^\circ$$

( $\angle BAD^*$  és  $\angle MD^*A$  fordított állásúak), vagyis az  $MOA$  egyenlő szárú háromszög szabályos, így  $AM = r$ . Ha  $D$  a  $BC$  szakasz tetszőleges pontja, akkor az  $AMCD$  konvex négyszögben a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség szerint

$$AD \cdot MC + AM \cdot DC \geq AC \cdot MD,$$

azaz

$$2r \cdot AD + r \cdot DC \geq AC \cdot MD.$$

Mínt hogy  $MD^*$  átfogó az  $MDD^*$  (esetleg elfajuló) derékszögű háromszögben, ezért  $MD \geq MD^*$ , így

$$AD + \frac{DC}{2} \geq \frac{AC \cdot MD^*}{2r},$$

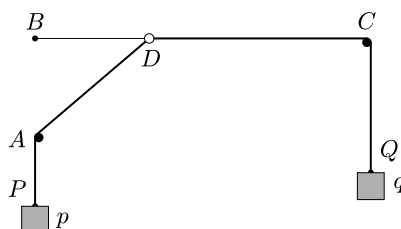
ahol a jobb oldal a  $D$  pont választásától független állandó. Egyenlőség pontosan akkor van, ha  $ADMC$  húrnegyszög, vagyis  $D = D^*$ . Ezzel sokadjára beláttuk, hogy az (1.2) kifejezés minimumhelyét a  $D^*$  pont adja, tehát a gyalogosnak itt kell kimennie az országútra.

Akiknek elnyerte tetszését a húrnegyszögek világa, azok a [3] könyvben indulhatnak a meghódításukra, ezenkívül pedig ajánljuk a szakaszban már korábban említett [2, 6, 11, 12] olvasnivalókat.

## 8. Besegít a mechanika

Zárásként a hόμεzős feladatot mechanikai köntösbe bújtatjuk, amelynek ötlete *Pólya György* – világhírű matematikus, a matematikai gondolkodás és problémamegoldás tudományának kiemelkedő tanár- és tudósegénisége – [9] könyvének 9. fejezetében is szerepel, ahol számos egyéb szélsőérték-feladat fizikai szemléletű megoldása olvasható élvezetes stílusban.

Képzeld el, hogy a 12. ábrán látható módon a vízszintes helyzetű  $BC$  (tökéletesen merev) rúdra felfűzve szabadon (súrlódásmentesen) csúszhat a  $D$  gyűrű. A gyűrűhöz egy  $DAP = \ell_1$  és egy  $DCQ = \ell_2$  (elegendő) hosszúságú (nyújthatatlan) kötelet kötünk, amelyeket rendre az  $A$  és  $B$  pontokban rögzített csigákon átvetünk, majd ezután a  $P$ , illetve  $Q$  végükre egy  $p$ , illetve  $q$  súlyú testet helyezünk, ahol a súlyok arányát később választjuk meg. (A szokásos módon a gyűrűt, a csigákat és a súlyokat is pontszerűnek tekintjük, a kötélt súlyát és a súrlódást pedig elhanyagoljuk.)



12. ábra

Magára hagyva a rendszert egy idő után beáll az egyensúlyi helyzetébe, amelyben a helyzeti energiája minimális. A  $BC$  rudat véve a viszonyítási szintnek a  $p$  súlyú test ( $-BP$ ) magasságban található, ezért a helyzeti energiája ( $-BP \cdot p$ ); ehhez hasonlóan a  $q$  súlyú test helyzeti energiája ( $-CQ \cdot q$ ). A rendszer helyzeti energiája tehát a  $BP \cdot p + CQ \cdot q$  kifejezés ellentettje, amely akkor lesz a lehető legkisebb, ha  $BP \cdot p + CQ \cdot q$  maximális. Minthogy  $BP = BA + AP$  és  $AP = \ell_1 - AD$ ,  $CQ = \ell_2 - DC$ , ezért

$$\begin{aligned} BP \cdot p + CQ \cdot q &= BA \cdot p + (\ell_1 - AD) \cdot p + (\ell_2 - DC) \cdot q = \\ &= (\ell_1 p + \ell_2 q + BA \cdot p) - (AD \cdot p + DC \cdot q). \end{aligned}$$

Itt az  $\ell_1 p + \ell_2 q + BA \cdot p$  mennyiség állandó, így egyensúlyi helyzetben az

$$AD \cdot p + DC \cdot q$$

kifejezés minimális. Ha most a súlyok arányát úgy választjuk meg, hogy  $q = p/2$ , akkor a

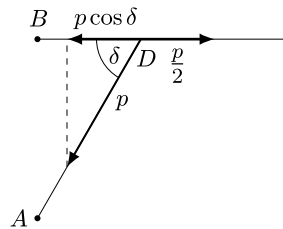
$$p \cdot \left( AD + \frac{DC}{2} \right)$$

kifejezés minimumhelye adja egyensúly esetén a  $D$  pont helyzetét. De ez (1.1) alapján éppen megegyezik a hόμεzős feladatbeli út megtételéhez szükséges idővel, ha  $p = 1/v$ . Így tehát a mechanikai problémabeli egyensúlyi helyzet megfelel a hόμεzős feladat időben legrövidebb útjának. Szerencsére a mechanikai rendszer egyensúlyi helyzetét nemcsak energiákkal, hanem a gyűrűre ható erők eredőjének segítségével szintén jellemezhetjük, ezáltal a minimumhely egy másik leírását nyerjük.

Tudjuk, hogy egyensúlyi helyzetben a gyűrűre ható erők kiegyenlítik egymást. Mivel a súlyok húzását a kötelek és a csigák változatlanul közvetítik, ezért a gyűrűre egy  $p$  és egy  $p/2$  nagyságú erő hat a két kötélt irányában, lásd a 13. ábrát. A gyűrű nyugalomban van, így ezen két erő vízszintes összetevői semlegesítik egymást (függőlegesen pedig a rúd merevségéből származó erő ellensúlyozza a  $p$  nagyságú erő hatását). Ha  $\angle ADB = \delta$ , akkor az  $A$  csiga irányában ható erő vízszintes komponense  $p \cos \delta$  nagyságú. A  $B$  csiga irányában a vízszintes  $p/2$  nagyságú erő hat, így szükségképpen

$$\frac{p}{2} = p \cos \delta,$$

vagyis  $\cos \delta = 1/2$ , tehát  $\delta = 60^\circ$ . Ez azt jelenti, hogy egyensúlyi helyzetben  $\angle ADB = 60^\circ$ , és az előbb megdöntött tükreben a hόμεzős feladatban szintén ez a  $D$  pont szolgáltatja az időben legrövidebb utat.



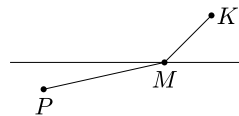
13. ábra

A fizika matematikai alkalmazásaira további meglepő példákat láthatunk a [8] könyvben, ahol a hőmezős feladat optikai és mechanikai megközelítéséről is bővebben olvashatunk. Ajánljuk továbbá az [1] cikket, amely elektromos ellenállások hálózatait hívja segítségül különböző egyenlőtlenések, köztük a számtani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenesség igazolásához.

### 9. Irány Kükutyin és Piripócs

A cikk elején beharangozott megoldások sora véget ért, de a lehetséges okoskodások tárháza alighanem kimeríthetetlen. Érdekes tovább keressélni és a közöttük lévő kapcsolatokat feltérképezni, valamint megvizsgálni, mi a helyzet abban az esetben, ha a gyalogos sebessége  $c$ -szer ( $c > 0$ ) akkora az országúton, mint a hőmezőn (az országúton akár lassabban is mehet). Egy általánosítási lehetőség az érdeklődő és elszánt Olvasók számára a következő.

**Feladat.** Kükutyin és Piripócs egy egyenes autópálya két különböző oldalán helyezkedik el (lásd 14. ábra). Az autópálya egy  $M$  pontjából leágazásokat építenek a két városhoz. Az építési költség Kükutyin felé  $c$ -szer akkora, mint Piripócs felé (ahol  $c > 0$ ). Hol legyen az  $M$  pont, hogy az útépités összköltsége minimális legyen?



14. ábra

A  $c = 1$  eset megoldása nyilvánvaló, mert ekkor a  $PK$  szakasz hosszban a legrövidebb, tehát a költsége minimális. Ez a feladat függvénytanai ábruhában a márciusi emelt szintű feladatsor 4. feladata volt (és például a 2009/2010-es tanévi Arany Dániel Matematikai Tanulóversenyen a kezdők I–II. kategória második fordulójában is szerepelt, a megoldásában a (6.2) egyenlőtlenység ugyancsak felbukkant, lásd a feladatsort és a megoldást a [13] weboldalon).

Próbáljunk meg a hőmezős feladatnak a KöMaL áprilisi számában és e cikkben közölt megoldásai közül minél többet a fenti feladatra általánosítani. Ezek közül a differenciálszámítást használó okoskodás olvasható a [7] könyv 11.49. Példájában; a mechanikai érvelés a [9] könyv 9. fejezetében; a Ptolemaiosz-tételre épülő megoldás a [10] cikkben; a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtleniséget alkalmazó pedig a [4] cikkben, ahol ezenfelül egy, a fény hullámter-mészete által motivált, Huygenstől eredő geometriai megoldás is található. Izgalmas kalandozást kívánunk az ötletek rengetegében!

**Köszönetnyilvánítás.** A szerző köszönettel tartozik Kovács Baláznak és Gnüdig Péternek a kéziratához fűzött értékes megjegyzéseikért.

### Hivatkozások

- [1] Besenyei Ádám, A Milne-egyenlőtlenesség és társai, avagy ellenállások ábruhában I–II., *KöMaL*, 2015/9, 514–524. és 2016/1, 2–10., <http://abesenyei.web.elte.hu/publications/ellenallas.pdf>.
- [2] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Az újra felfedezett geometria*, Gondolat, Budapest, 1977.
- [3] Gerőcs L., *A húrnégyszögek meghódítása*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2010.
- [4] M. Golomb, Elementary Proofs for the Equivalence of Fermat’s Principle and Snell’s Law, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 71, No. 5 (May, 1964), 541–543., <http://www.jstor.org/stable/2312599>.

- [5] Hraskó András, Surányi László (szerk.), *Geometria, 9–10. évfolyam*, Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 2013.,  
[http://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol\\_geometria\\_ii.pdf](http://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol_geometria_ii.pdf).
- [6] Kubatov Antal, *Ptolemaios tétele, Casey-tétel, feladatok*,  
<http://matekold.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok>.
- [7] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós Analízis I.*, TypoT<sub>E</sub>X, Budapest, 2012.
- [8] M. Levi, *The Mathematical Mechanic: Using Physical Reasoning to Solve Problems*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2009.
- [9] Pólya György, *Indukció és analógia (A matematikai gondolkodás művészete 1.)*, Gondolat, Budapest, 1988.
- [10] D. Pedoe, A Geometric Proof of the Equivalence of Fermat's Principle and Snell's Law, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 71, No. 5 (May, 1964), 543–544.,  
<http://www.jstor.org/stable/2312600>.
- [11] Reiman István, Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon, 3. kiadás, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
- [12] Reiman István, *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., 1999.
- [13] <http://www.eszesen2010.hu>.