I. rész

1. *Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán:*
a) $\sqrt{x+12}+\sqrt{x-12}=6$;
b) $3^{\lg x^2}+3^{1+\lg x}=108$. (*12 pont*)

Megoldás. *a)* Az egyenlet bal oldala $x \geq 12$ esetén értelmezett. Mindkét oldal nemnegatív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás lesz, és összevonás után a következőt adja:

$$2x+2\sqrt{x^2-144}=36.$$

2-vel osztva, x-et kivonva, majd négyzetre emelve az

$$x^2-144=x^2-36x+324$$

egyenletet kapjuk (ez csak $x \leq 18$ esetén ekvivalens átalakítás). Ezt 0-ra rendezve és megoldva $x=13$ adódik eredményül, ami a kikötésnek megfelel, és az ekvivalens lépések miatt biztosan helyes gyök.

b) A hatványozás és a logaritmus azonosságait alkalmazva:

$$3^{2\lg x}+3^{1+\lg x}=108,$$

$$\left(3^{\lg x}\right)^2+3\cdot 3^{\lg x}=108.$$

$3^{\lg x}$-et új változónak tekintve másodfokú egyenletet kapunk, amelyből $3^{\lg x}=-12$ vagy $3^{\lg x}=9$ adódik.

Az első eset nem lehetséges, a másodikból $\lg x=2$, azaz $x=100$, ami valóban gyöke az egyenletnek.

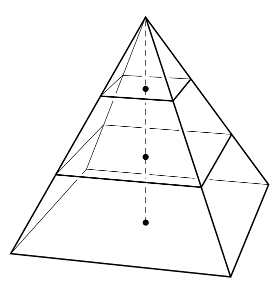
2. *Az* $\{1;2;3;4;\ldots;400\}$ *számhalmaz elemei közül kiválasztunk egyet véletlenszerűen. (Mindegyiket egyenlő eséllyel.) Mekkora a következő események valószínűsége:*
a) A húzott szám osztható 3*-mal, de nem osztható* 4*-gyel;*
b) A húzott szám osztható 3*-mal,* 4*-gyel vagy* 5*-tel;*
c) A húzott szám számjegyeinek összege 5*?* (*14 pont*)

Megoldás. *a)* 3-mal osztható 133 db szám, ezek közül 4-gyel is osztható 33 db szám (a 12 többszörösei), vagyis a kedvező esetek száma 100, a valószínűség $\frac{100}{400}=0{,}25$.

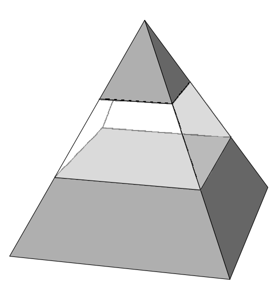
b) 3-mal 133 db, 4-gyel 100 db, 5-tel 80 db, 12-vel 33 db, 15-tel 26 db, 20-szal 20 db, 60-nal 6 db szám osztható. A kedvező esetek száma: $133+100+80-33-26-20+6=240$, a valószínűség $\frac{240}{400}=0{,}6$.

c) A megfelelő háromjegyű számok: 140, 104, 230, 203, 320, 302, 221, 212, 122, 113, 131, 311; kétjegyűek: 14, 41, 23, 32, 50, egyjegyű: 5. A kedvező esetek száma 18, a valószínűség $\frac{18}{400}=0{,}045$.

3. *a) Egy szabályos négyoldalú gúlát az alaplappal párhuzamos, a magasság harmadolópontjain átfektetett két síkkal három részre osztunk. A középső, csonkagúla alakú rész térfogata* $28\ \mathrm{m}^3$*. Számítsuk ki a teljes gúla térfogatát.*



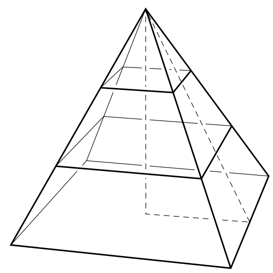
b) Az előbbi gúla egy köztéri alkotásnak szánt kisebb épület, alapéle 6 m*. Felszínét a középső részen üveg borítja. Mekkora az üvegezett felület?* (*14 pont*)



Megoldás. *a*) A három gúla hasonló, hasonlóságuk aránya $1:2:3$, ebből térfogatuk aránya $1:8:27$, a középső csonkagúla térfogata $\frac{8}{27}-\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$ része a gúla térfogatának, és ez $28\ \mathrm{cm}^3$. Ebből a gúla térfogata $108\ \mathrm{cm}^3$.

b) A gúla alaplapjának területe $36\ \mathrm{m}^2$. A gúla térfogatképletéből a magasságra 9 méter adódik.

Az *ábrán* szaggatott vonallal rajzolt derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt felírva az oldallap magasságára $\sqrt{90}$ métert kapunk.



A párhuzamos szelők tétele alapján a csonkagúlát határoló trapéz magassága ennek harmadrésze, azaz $\sqrt{10}$ méter. A trapéz két alapja 2 m és 4 m, területe az előbbi adatokból $3\sqrt{10}\ \mathrm{m}^2$. Az üvegezett felület ennek 4-szerese, azaz

$$12\sqrt{10}\ \mathrm{m}^2 \approx 37{,}95\ \mathrm{m}^2.$$

4. *Egy hat elemű adathalmaz átlaga* 10. *Az első négy adat:* 6, 11, 14, 8.

a) *Mennyi a hiányzó két adat átlaga?*

b) *Adjuk meg a hiányzó két adatot, ha az adathalmaz szórása* $\sqrt{7}$. (*12 pont*)

Megoldás. *a*) A hat adat összege 60, tehát a két hiányzó adat összege 21, átlaguk 10,5.

b) Legyen a két adat x és y. Tudjuk, hogy $x+y=21$. A szórás:

$$\sqrt{\frac{(6-10)^2+(11-10)^2+(14-10)^2+(8-10)^2+(x-10)^2+(y-10)^2}{6}}=\sqrt{7}.$$

y helyébe $(21-x)$-et írva:

$$\sqrt{\frac{16+1+16+4+(x-10)^2+(11-x)^2}{6}}=\sqrt{7}.$$

Négyzetre emelve és rendezve az $x^2-21x+108=0$ egyenletre jutunk, melynek gyökei 12 és 9. Tehát $x=12$, $y=9$, vagy fordítva. A két hiányzó adat tehát 9 és 12.

II. rész

5. *Egy társasjáték kelléke* 80 *darab kártyalap, amelyeken kék vagy piros színnel egy-egy írásjel látható. A jelek* 30%*-a kérdőjel,* 45%*-a felkiáltójel, a többi pont. A piros írásjeleknek* 3/8 *része, a kékeknek* 1/6 *része pont.*

a) *Hány kék, illetve piros lap van a pakliban?*

Ha a játék során tíz alkalommal húzok a pakliból (a húzott lapokat mindig visszatesszük, és újrakeverjük a kártyákat), mekkora a valószínűsége, hogy

b) *egy kérdőjelet sem húzok;*

c) 3*-nál több kérdőjelet húzok?*

d) *Mennyi a húzott kérdőjelek számának várható értéke?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) 24 kérdőjel, 36 felkiáltójel, és így 20 pont van a jelek között. Ha a pirosak számát n-nel, a kékekét $(80-n)$-nel jelöljük, a pontok száma

$$\frac{3}{8}n+\frac{1}{6}(80-n)=20.$$

Ezt megoldva azt kapjuk, hogy 32 piros és 48 kék lap van a pakliban.

b) Egy húzás alkalmával 0,3 valószínűséggel húzok kérdőjelet, 0,7 valószínűséggel mást. Annak valószínűsége, hogy a tíz húzásból egy sem kérdőjel $0{,}7^{10}\approx 0{,}028$.

c) Jelölje $p(n)$ annak valószínűségét, hogy a kérdőjelek száma n. Ekkor $p(0)=0{,}028$; $p(1)=10\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^9\approx 0{,}121$; $p(2)=\binom{10}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^8\approx 0{,}233$; $p(3)=\binom{10}{3}\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^7\approx 0{,}267$.

Ezeket az értékeket összeadva annak valószínűsége, hogy legfeljebb 3 kérdőjelet húzunk 0,649. Annak valószínűsége, hogy ennél több kérdőjelet húzunk $1-0{,}649=0{,}351$.

d) Binomiális eloszlásról van szó, melynek paramétere 0,3, a kísérletek száma 10. A várható érték $n\cdot p=10\cdot 0{,}3=3$.

6. *a)* (a_n) *és* (b_n) *pozitív tagú mértani sorozatok, hányadosuk* 1,5, *illetve* 2. *Állapítsuk meg az alábbi sorozatokról, hogy mértani sorozatok, illetve számtani sorozatok-e, és ha igen, adjuk meg a hányadost* (q), *illetve a differenciát* (d).

	mértani	számtani	mindkettő	egyik sem	q	d
az a_n és b_n oldalú téglalap területe						
az a_n oldalú kocka átlója						
$\lg b_n$						
10^{b_n}						
$\dfrac{b_{n+5}}{b_n}$						

b) *A fent említett* (a_n) *sorozat első tagja* 0,2. *Számítsuk ki az*

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}}+\frac{1}{a_{n+3}}+\dots$$

végtelen sor összegének pontos értékét.

c) *Egy nyolctagú számtani sorozat páratlan indexű tagjainak összege* 8,8, *páros indexű tagjainak összege* 10,4. *Adjuk meg a nyolc tagot.* *(16 pont)*

Megoldás. *a)*

	mértani	számtani	mindkettő	egyik sem	q	d
az a_n és b_n oldalú téglalap területe	X				3	
az a_n oldalú kocka átlója	X				1,5	
$\lg b_n$		X				$\lg 2$
10^{b_n}				X		
$\dfrac{b_{n+5}}{b_n}$			X		1	0

b) A sor első tagja 5, hányadosa 1,5-nek reciproka, azaz $\frac{2}{3}$. Az összeg:

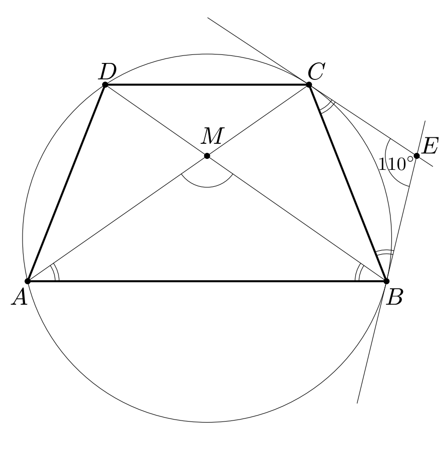
$$\frac{5}{1-\frac{2}{3}}=15.$$

c) $a_1+a_1+2d+a_1+4d+a_1+6d=8{,}8,$ ebből $4a_1+12d=8{,}8.$
$a_1+d+a_1+3d+a_1+5d+a_1+7d=10{,}4,$ ebből $4a_1+16d=10{,}4.$
Az egyenletrendszer megoldása $d=0{,}4$, $a_1=1$. A tagok: 1; 1,4; 1,8; 2,2; 2,6; 3; 3,4; 3,8.

7. *a)* *ABCD húrtrapéz, hosszabbik alapja az AB oldal. A trapéz köré írt körhöz érintőt húzunk a B és a C csúcsban, a metszéspontot E-vel jelölve* $CEB\sphericalangle=110^\circ$. *Milyen szögben metszik egymást a trapéz átlói?*

b) *ABCD húrtrapéz, hosszabbik alapja az AB oldal,* $A(-8;10)$, $B(12;0)$. *Tudjuk továbbá, hogy a D csúcs az y tengely pozitív félegyenesére illeszkedik, és az átlók merőlegesek egy-egy szárra. Határozzuk meg a C és a D csúcs koordinátáit.* *(16 pont)*

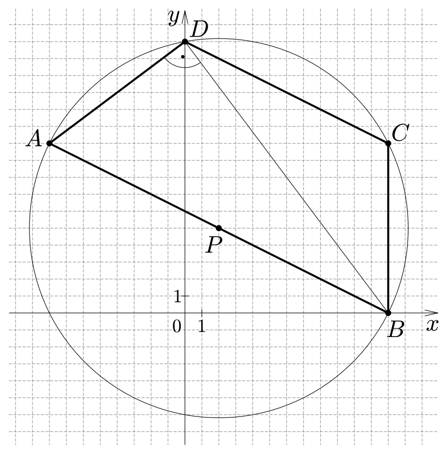
Megoldás. *a)* Legyen M az átlók metszéspontja. $ECB\sphericalangle$ és $EBC\sphericalangle$ a kör BC húrjához tartozó érintőszárú kerületi szögek, tehát egyenlők, és a nagyságuk 35°. $CAB\sphericalangle$ ugyanahhoz a húrhoz tartozó kerületi szög, ezért egyenlő az előbbiekkel, vagyis 35°. A szimmetria miatt a $DBA\sphericalangle$ is 35°. Az AMB háromszögben a harmadik szög 110°, tehát az átlók által közbezárt szög $180^\circ-110^\circ=70^\circ$.



b) Mivel a D csúcsból az AB alap derékszögben látszik, D rajta van az AB szakasz Thalész-körén. Ennek középpontja $P(2;5)$, sugara Pitagorasz tételéből $\sqrt{125}$. A kör egyenlete

$$(x-2)^2+(y-5)^2=125.$$

A D pont 1. koordinátája 0, ezt x helyébe írva és az egyenletet y-ra megoldva $y=16$ és $y=-6$ adódik. A szöveg szerint csak $y=16$ helyes, tehát $D(0;16)$.



A DC szakasz párhuzamos az AB szakasszal, ezért irányvektoruk megegyezik. $\overrightarrow{AB}(20;-10)$, ezt 10-zel osztva egy egyszerűbb irányvektor $\mathbf{v}(2;-1)$. Ebből a DC egyenes normálvektora $\mathbf{n}(1;2)$, ismert pontja $D(0;16)$. Írjuk fel az egyenletét: $x+2y=32$.

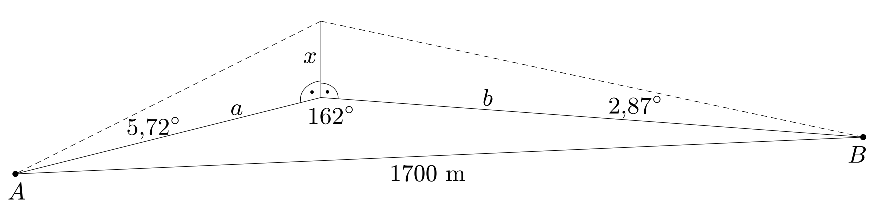
Oldjuk meg az egyenes és a kör egyenletéből álló egyenletrendszert. $x=0$, $y=16$, illetve $x=12$, $y=10$ a két megoldás, vagyis $C(12;10)$.

8. *a*) *Egy síkságon futó egyenes vasúti szakasz két állomásépületének távolsága* 1,7 km. *A vasútvonaltól távolabb álló toronyház teteje az egyik állomásról* 5,72°*-os, a másikról* 2,87°*-os emelkedési szögben látszik. A torony tövénél állva a két állomás közötti szakasz* 162°*-os szögben látható. Készítsünk ábrát. Adjuk meg a torony magasságát egész méterre kerekítve.*

b) *Egy háromszög két oldala* 70 m *és* 110 m, *a velük szemközti szögek különbsége* 30°. *Mekkorák a háromszög szögei? (Az eredményeket egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.)* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az *ábrán* A és B az állomásokat jelöli. A torony magassága legyen x. A két derékszögű háromszögben a-t és b-t kifejezve

$$a=\frac{x}{\operatorname{tg}5{,}72^0}=\frac{x}{0{,}1}\quad\text{és}\quad b=\frac{x}{\operatorname{tg}2{,}87^0}=\frac{x}{0{,}05}.$$



A torony töve és az állomások által meghatározott háromszögre írjuk fel a koszinusztételt:

$$1700^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos 162°.$$

a és b helyébe a fenti kifejezéseket behelyettesítve olyan egyenletet kapunk, amelynek a változója az x. Ezt megoldva az eredmény $x=57{,}29$ m. A torony magassága méterre kerekítve 57 m.

b) A 70 m-es oldallal szemközti szög legyen α, a 110 m-es oldallal szemközti szög $\alpha+30°$. (A nagyobb oldallal szemben van a nagyobb szög.) A szinusztétel szerint

$$\frac{\sin(\alpha+30°)}{\sin\alpha}=\frac{11}{7}.$$

Szorozzunk be $\sin\alpha$-val, a baloldalon alkalmazzunk addíciós tételt, a tört, illetve gyök alakban adott értékeket írjuk át tizedestörtbe:

$$0{,}866\sin\alpha + 0{,}5\cos\alpha = 1{,}5714\sin\alpha,$$
$$0{,}5\cos\alpha = 0{,}7054\sin\alpha.$$

Osszuk az egyenlet két oldalát $\cos\alpha$-val (ami nem 0, mert $\alpha = 90°$-ra nem igaz az egyenlet):

$$0{,}70887 = \operatorname{tg}\alpha.$$

Ebből $\alpha = 35{,}3°$, $\alpha + 30° = 65{,}3°$, a harmadik szög $79{,}4°$.

9. *a) Adjuk meg az f harmadfokú függvényt, ha egyik zérushelye az 1, deriváltja az $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$ függvény.*

b) Jelölje p a $g(x) = \sin\dfrac{x}{3}$ függvény legkisebb pozitív zérushelyét. Számítsuk ki a $[0; p]$ intervallumon a g függvény grafikonja és az x tengely közé eső zárt területet.

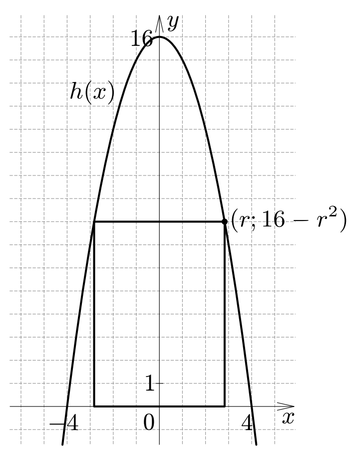
c) A $h(x) = -x^2 + 16$ függvény grafikonja és az x tengely által határolt síkidomot megforgatjuk az y tengely körül. Mekkora az így kapott forgástestbe írható maximális térfogatú henger térfogata? *(16 pont)*

Megoldás. *a)* $f(x)$ az $f'(x)$ primitívfüggvénye, tehát $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + c$. Tudjuk, hogy $f(1) = 0$, tehát $0 = 1 - 6 + 11 + c$, amiből $c = -6$. A függvény hozzárendelési szabálya $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

b) $\sin\dfrac{x}{3} = 0$ akkor és csak akkor, ha $\dfrac{x}{3} = k\pi$, vagyis $x = 3k\pi$ (k egész). A legkisebb pozitív zérushely tehát a 3π. A $[0; 3\pi]$ intervallumon a függvény értékei pozitívak, ezért az x-tengellyel bezárt terület

$$\int_0^{3\pi} \sin\frac{x}{3} = \left[-3\cos\frac{x}{3}\right]_0^{3\pi} = 3 - (-3) = 6.$$

c) A forgástestnek és a beírt hengernek a koordinátasíkra eső keresztmetszetét mutatja az *ábra.*



A henger alapkörének sugara r, magassága $16 - r^2$. Ebből a térfogata

$$V = r^2(16 - r^2)\pi.$$

Ez akkor maximális, ha

$$f(r) = r^2(16 - r^2) = 16r^2 - r^4$$

maximális, ahol $0 < r < 4$.

A függvény deriváltja

$$f'(r) = 32r - 4r^3 = 4r(8 - r^2).$$

A vizsgált tartományban a derivált értéke 0, ha $r = \sqrt{8}$, pozitív, ha $r < \sqrt{8}$ és negatív, ha $r > \sqrt{8}$.

A $]0; 4[$ intervallumon tehát az $f(r)$ függvénynek a $\sqrt{8}$-ban maximuma van.

A henger maximális térfogata így $V = 8 \cdot (16 - 8) = 64$.