

I. rész

1. Egy dömper az építkezés és a kavicsbánya között szállít kavicsot. A két hely között 18 km a távolság. Az építkezéstől a bányáig és vissza pontosan 1 óra 6 perc a tiszta szállítási idő.

a) Mekkora a teherautó sebessége terheletlenül, ha azt tudjuk, hogy terhelve (bányából az építkezésre) 6 km/h-val kisebb átlagsebességgel halad?

b) 100 km-re vetítve a kocsni fogyasztása 10%-kal több terhelve, mint terheletlenül. Mennyi a kocsni terheletlen fogyasztása (liter/100 km mértékegységben), ha az oda-vissza út során összesen 10,8 liter benzint fogyasztott? (12 pont)

2. Tekintsük a következő rekurzíván megadott sorozatokat: $a_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} + a_{n-1}$ (ha $n > 1$), illetve $b_1 = 1$, $b_n = \frac{n+2}{n-1} \cdot b_{n-1}$ (ha $n > 1$).

a) Hány olyan $n < 2016$ indexű tagja van az $\{a_n\}$ sorozatnak, ami egész értéket vesz fel?

b) Hány olyan n indexű tagja van a $\{b_n\}$ sorozatnak, amelyre teljesül a

$$6 \cdot b_n \leq n^3 + 2n^2 + 20n - 72$$

egyenlőtlenség?

c) Adjuk meg az $s_{100} = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{100}$ összeg pontos értékét. (14 pont)

3. Három testvérnek, András, Béla és Csaba gazdának külön-külön 20-20 hektárnyi földje van. A birtokokból külön-külön 10-10 hektár telepített szőlő, amin adott, hogy mit termelnek (nem lenne értelme kiszedni a tőkét), a másik 10 hektáron viszont három egyéb növény termelése közül választhatnak külön-külön a testvérek (krumpli, rizs, homoktövis). Az elmúlt 120 év bergengóciai regionális – az időjárásra vonatkozó – statisztikái alapján a következő táblázat készíthető az egyes növények 10 hektárra vonatkozó hasznáról (az értékek ezer bergengóc euróban adottak).

Időjárás	aszályos	száraz	normál	csapadékos	monszun
Időjárás esélye	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
Növények haszna az egyes időjárás-típusok esetén (1000 bergengóc euró/10 hektárban)					
szőlő	5	12	10	4	-6
rizs	-5	0	4	7	9
krumpli	2	10	9	2	-8
homoktövis	3	3	3	3	3

a) Mit termeljen András gazda, ha azt szeretné, hogy a várható nyeresége a lehető legnagyobb legyen?

b) Mennyi valamely gazda nyereségének (ami az időjárástól, mint véletlen eseménytől függ) szórása, ha a szőlő mellett a másik 10 hektáron rizst, krumplit, illetve homoktöviset termel?

Bergengóciában úgy tartják, hogy – azonos várható nyereség esetén – az a kockázatosabb beruházás, ahol nagyobb a szórás.

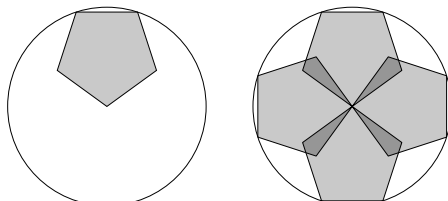
c) Béla gazda azt szeretné, hogy a lehető legrosszabb időjárás esetén is a lehető legkevesebb legyen a vesztesége. Igaz-e, hogy neki a legkevésbé kockázatos beruházást kell választania?

d) Csaba gazda egy nagy értékű traktort vett hitelre. Ha az év végén (miután már értékesítette az az évi termést) nem tud visszafizetni 15 000 bergengóc eurót, akkor csődbe megy.

Igaz-e, hogy ahhoz, hogy ezt a lehető legnagyobb eséllyel elkerülje: neki a legkockázatosabb beruházást érdemes választania? Mekkora eséllyel menekül meg ekkor a csődtől Csaba gazda? (11 pont)

4. Kati néni egy kör alakú asztalra (a bal oldali *ábra* szerint) feltett egy szabályos ötszög alakú terítőt úgy, hogy a terítő egyik csúcsa egybeesik az asztal középpontjával, míg a terítő két másik csúcsa éppen az asztal kerületére esik.

a) Az asztal hány %-át fedi le Kati néni terítője?



Mari néni egy, az előzővel azonos méretű asztalra négy (az előző terítővel azonos méretű) terítőt tett fel. Az egyik terítőt pontosan úgy, ahogy Kati néni, míg a többi terítőt (a jobb oldali *ábra* szerint) úgy, mintha az első terítőt rendre elforgatná 90° , 180° , 270° -kal az asztal középpontja körül.

b) Az asztal hány %-át fedi le Mari néni négy terítője együttesen? (14 pont)

II. rész

5. Véletlenszerűen kiválasztok 0 és 9999 között egy olyan számot, ami tartalmaz 2-es számjegyet. Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott számomban több 2-es van a számjegyek között, mint 1-es? (Pl. 2012 „kedvező” tulajdonságú szám, de 2016 nem.) (16 pont)

6. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:

$$1 = \left(\frac{4x^2 - 8x + 7}{4} \right)^{y^2 - 8y + 7},$$

$$\arccos x = \arcsin y.$$

(16 pont)

7. Egy egyenesnek tekinthető 210 km hosszú autópálya-útszakasz mentén néhány mentőállomás áll. Az első állomás a 0-dik km-nél van, a második az első km-nél, ...; általában az i -edik, és az $i + 1$ -edik mentőállomás között i km a távolság (és az állomások balról jobbra számozottak).

a) Hány mentőállomás van az út mentén?

b) Ha baleset történik valamely pontján az útszakasznak (feltehetjük, hogy a baleset bekövetkezte bármely útszakaszon a szakasz hosszával egyenesen arányos), akkor mindkét szomszédos mentőállomást értesítik, és mindkét helyről indul egy mentőkocsi. Egy perc készenlétbe állási idő után konstansnak tekinthető 60 km/h-s sebességgel száguldanak a kocsik a céljuk felé. Mekkora eséllyel ér ki a baleset helyszínére legfeljebb 4 perc alatt legalább egy mentőkocsi?

c) Az útszakasz valamely pontján mentési gyakorlatot tervez a katasztrófavédelem. Hol legyen a mentési gyakorlat, hogy a lehető legkisebb legyen a mentők benzinköltsége? (Minden állomásról egy mentőkocsi vesz részt, melyeknek azonos a fogyasztásuk.) (16 pont)

8. a) Igazoljuk, hogy azon pontok halmaza a síkon, melyekre teljesül az $(x + y)^2 - 2(x + 2)(y + 1) = 4^2$, egy k kör. Mi a k kör középpontja, és sugara?

b) Az e egyenes egyenlete $x + 2y = 10$. Adjuk meg a $P(1013; 2016)$ ponton átmenő, az e egyenesre merőleges f egyenes egyenletét.

c) Válasszunk véletlenszerűen egy pontot a k kör belsejében. Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont közelebb van az e egyeneshez, mint az f egyeneshez?

(A k kör, e , f egyenesek a fenti pontok során definiált ponthalmazok.) (16 pont)

9. Az M2016-os bolygón nyolcféle űrbéli állat él. A még el nem nevezett állatokat a biológusok a latin abc A, B, C, D, E, F, G, H betűivel kódolták. Némelyik állat megeszi a másikat, hogy melyik melyiket azt a következő táblázat adja meg.

Állat	A	B	C	D	E	F	G	H
„Zsákmánya”	B, C	–	A, D, F	F, G, H, E	H, G	A, B, H	B, H	–

a) A bolygóra érkező földi expedíció elfog mind a 8 állatból egy-egy példányt, és az állatokat a Földre szeretnék szállítani. Legalább hány ketrecbe zárják az állatokat, ha mindet épségben akarják hazavinni? (Egy ketrecben akárhány állat elfér.)

b) Véletlenszerűen kiválasztva két állatot a 8 közül mennyi a valószínűsége, hogy egyik sem bántja a másikat?

c) A nyolc állat felhelyezhető-e úgy egy kör alakú cirkuszi porond kerülete mentén, hogy a körvonalon szomszédos állatok ne bántás egymást? (16 pont)