

I. rész

1. 2015-ben az Energetikai Szakközépiskola és Kollégium (ESZI) végzős, 12. osztályos százhuszonöt diákja közül néhányan emelt szintű érettségit tettek matematikából, átlaguk pontosan 3,8 volt. A többi diák középszinten érettségizett, az ő érettségi átlaguk pedig pontosan 3,55 volt. A diákok közül mindenki sikeres vizsgát tett, az összesített iskolai matematika érettségi átlag pontosan 3,56 lett.

a) Hányan érettségiztek emelt szinten?

b) Az emelt szinten érettségizők osztályzatainak mediánja: 4, mennyi lehet az osztályzatok módusza?

c) Öt 13. évfolyamos ESZI-s diák írt szintemelő érettségi dolgozatot matematikából, az ő átlaguk is 3,80 volt, és itt sem bukott meg senki. Tudjuk, hogy az osztályzataik módusza és mediánja is 5. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dolgozatok közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva közülük mindkettő jeles? (12 pont)

Megoldás. a) x diák érettségizett emelt szinten és $125 - x$ közép szinten. Felírjuk az alábbi egyenletet:

$$3,8x + 3,55 \cdot (125 - x) = 3,56 \cdot 125.$$

Ennek a megoldása $x = 5$. Így 5 diák érettségizett emelt szinten.

b) Mivel a középső osztályzat 4, és a számjegyek összege $3,8 \cdot 5 = 19$, a lehetséges számötösök a következők:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1. 2, 3, 4, 5, 5; | 2. 2, 4, 4, 4, 5; |
| 3. 3, 3, 4, 4, 5; | 4. 3, 4, 4, 4, 4. |

Ebből a lehetséges móduszok: az első esetben 5, a második és az utolsó esetben 4, a harmadik esetben pedig 3 és 4.

c) Az egyetlen lehetséges számötös: 2, 2, 5, 5, 5, így az összes eset: $\binom{5}{2} = 10$, a kedvező esetek száma: $\binom{3}{2} = 3$.

A valószínűsége $\frac{3}{10}$ adódik.

2. Egy számtani és egy mértani sorozat első tagja egyaránt 2. A sorozatok második tagjai szintén egyenlők, valamint a mértani sorozat hányadosa egyenlő a számtani sorozat differenciájával.

a) A mértani sorozat 10. tagja a számtani sorozat hányadik tagjával egyenlő?

b) Mutassuk meg, hogy a mértani sorozat bármely tagja eleme a számtani sorozatnak.

c) Mutassuk meg, hogy a mértani sorozat egyik tagja sem állítható elő a számtani sorozat néhány egymás utáni tagjának összegeként. (13 pont)

Megoldás. a) A sorozatok megfelelő tagjai: $2, 2 + d$ és $2, 2d$, amiből $2 + d = 2d$, megoldása $d = 2$. Tehát a számtani sorozat: $2, 4, 6, 8, \dots$, a mértani sorozat: $2, 4, 8, 16, \dots$. Így a mértani sorozat 10. tagja $2^{10} = 1024$, ami a számtani sorozat 512. tagja.

b) A mértani sorozat a 2^n sorozat, így minden tagja páros szám. A számtani sorozat az $a_n = 2n$ sorozat, melynek tagjai között az összes pozitív páros szám szerepel, tehát valóban eleme a mértani sorozat összes tagja.

c) A mértani sorozat n . tagja: $a_n = 2^n$, a számtani sorozat néhány egymás utáni tagjának összege: $2k + (2k + 2) + \dots + (2k + 2(m - 1))$, ahol $2k$ az első összeadandó tag és m a tagok száma. Így az összeg: $S = (4k + 2(m - 1)) \cdot \frac{m}{2} = (2k + m - 1) \cdot m$. Ez utóbbi egy páratlan és egy páros szám szorzata, hiszen m és $m - 1$ paritása különböző. Ez csak a $2^n = 1 \cdot 2^n$ felbontás esetén lehetséges, de ekkor $m = 1$, ami nem felel meg a feltételeknek.

3. Legyen az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény hozzárendelési szabálya

$$f(x) = 4^x + 0,5^{2x} - 3.$$

a) Adjuk meg az f függvény értékkészletét és zérushelyeinek pontos értékét.

b) Mutassuk meg, hogy a függvény páros és szigorúan monoton növekvő a pozitív számok halmazán. (13 pont)

Megoldás. a) Az értékkészlethez elég a $4^x + 0,5^{2x}$ kifejezést vizsgálnunk. Ezt átalakítva $\left(4^x + \frac{1}{4^x}\right)$ -t kapunk, ami legalább 2, hiszen egy pozitív szám és a reciprokának az összege. A függvény értékkészletét a -1 -nél nem kisebb számok alkotják, mert folytonos függvények összege is folytonos, illetve a négyes alapú exponenciális függvény folytonos és szigorúan monoton növekvő, és $4^x + \frac{1}{4^x} > 4^x$. A zérushely megállapításához a $4^x + 0,5^{2x} - 3 = 0$, vagyis a $4^x + \frac{1}{4^x} - 3 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Beszorozva és rendezve az egyenletet: $(4^x)^2 - 3 \cdot 4^x + 1 = 0$. A másodfokú egyenletet megoldva a megoldások: $4^x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, amiből a két gyök pontos értéke: $x_1 = \log_4 \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, illetve $x_2 = \log_4 \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

b) Mivel $4^x + \frac{1}{4^x} = \frac{1}{4^{-x}} + 4^{-x}$, ezért a függvény páros. A szigorú monoton növekedés vizsgálatához képezzük a következő különbséget:

$$f(x + k) - f(x) = 4^{x+k} + \frac{1}{4^{x+k}} - 4^x - \frac{1}{4^x},$$

ahol $x \geq 0, k > 0$.

Átalakítva:

$$4^k \cdot 4^x + \frac{1}{4^k \cdot 4^x} - 4^x - \frac{1}{4^x} = (4^k - 1)4^x - (4^k - 1)\frac{1}{4^k \cdot 4^x}.$$

Szoroztattá alakítunk:

$$(4^k - 1) \left(4^x - \frac{1}{4^k \cdot 4^x} \right) > 0,$$

mert mindkét tényező pozitív. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $f(x+k) - f(x) > 0$, ami a szigorú monoton növekedést jelenti.

4. a) Mekkora lehet a p valós paraméter értéke, ha tudjuk, hogy a $\cos x - \sin x = p$ egyenletnek van megoldása?
b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{2 \cos x + 4 \sin x}{\cos x + \sin x} = 2 \operatorname{tg} x + 1. \quad (13 \text{ pont})$$

Megoldás. a) Szorozzuk az egyenletet $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -vel, ekkor a

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = p \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

egyenletet kapjuk, ahol a bal oldal $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, a jobb oldal $p \frac{\sqrt{2}}{2}$, aminek az értéke -1 és 1 közé kell, hogy essen. Ebből $-\sqrt{2} \leq p \leq \sqrt{2}$ adódik.

- b) Kikötések: $\cos x \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); $\cos x + \sin x \neq 0$, amiből $\operatorname{tg} x \neq -1, x \neq \frac{3\pi}{4} + l\pi$ ($l \in \mathbb{Z}$).
Gyökvesztés nélkül egyszerűsíthetjük a bal oldalt $\cos x$ -szel, ekkor

$$\frac{2 + 4 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 2 \operatorname{tg} x + 1.$$

Szorzás és rendezés után kapjuk a

$$2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0$$

másodfokú egyenletet, aminek megoldásai $\operatorname{tg} x = 1$, illetve $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$, amiből $x = \frac{\pi}{4} + m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$), illetve $x = -0,46 + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) következik (ahol a $-0,46$ az $\arctan -\frac{1}{2}$ két tizedesjegyre kerekített értéke).

II. rész

5. Anna és Balázs szeretnek sakkozni, ezért 100 játszmás páros mérkőzéseket szoktak játszani. Egy játszmának háromféle kimenetele lehet: $A = \{\text{Anna nyer}\}$, $B = \{\text{Balázs nyer}\}$, $C = \{\text{a játszma döntetlenül végződik}\}$. Tegyük fel, hogy az A és a B események valószínűsége a páros mérkőzések során: $P(A) = \frac{3}{5}p$, $P(B) = \left(p + \frac{1}{5}\right)^2$, ahol p valós paraméter.

Anna és Balázs azt tervezik, hogy a következő hétvégén 100 játszmás páros mérkőzést játszanak. Egy játszmában a győzelemért egy pont, a döntetlenért fél pont jár, a vereségért a játékos nem kap pontot.

- a) Mekkora lehet a p paraméter értéke?
b) A p paraméter értékétől függően legalább, illetve legfeljebb mekkora lehet a tervezett páros mérkőzés során a két játékos megszerezhető pontjainak várható értéke közötti különbség? (16 pont)

Megoldás. a) Az összes n jegyű számok száma: $9 \cdot 10^{n-1}$. Azoké, melyekben nincs kettes: $8 \cdot 9^{n-1}$.
A felírható egyenlőtlenség ez alapján:

$$\frac{8 \cdot 9^{n-1}}{9 \cdot 10^{n-1}} < \frac{1}{3},$$

átrendezve kapjuk: $0,9^{n-1} < \frac{3}{8}$. Mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve és megoldva az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$n > \frac{\lg \frac{3}{8}}{\lg 0,9} + 1 = 10,309 \dots$$

Tehát a 11, vagy annál többjegyű számokat vizsgáltuk meg.

b) A valószínűség értelmezéséből $0 \leq p$ és $\frac{3}{5}p + \left(p + \frac{1}{5}\right)^2 \leq 1$ egyszerre kell, hogy teljesüljön. A második egyenlőtlenséget rendezve: $p^2 + p - \frac{24}{25} \leq 0$ adódik.

Ennek a megoldásai a $-\frac{8}{5} \leq p \leq \frac{3}{5}$ intervallum elemei. Figyelembe véve a $0 \leq p$ feltételt, $0 \leq p \leq \frac{3}{5}$ a feladat megoldása.

c) A döntetlenek nem befolyásolják a megszerzett pontok közötti különbséget, így a győzelmekből számítható várható értékek közötti különbséget kell vizsgálnunk, azaz a következő értéket:

$$100 \left(p + \frac{1}{5}\right)^2 - 100 \cdot \frac{3}{5}p = 100 \left(p^2 - \frac{1}{5}p + \frac{1}{25}\right) = 100 \left[\left(p - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{3}{100}\right].$$

Ennek a minimum értéke 3, amit $p = \frac{1}{10}$ -nél vesz fel. Maximumát pedig $p = \frac{3}{5}$ -nél veszi fel, ahol az értéke 28.

Így a megszerzett pontok közötti legnagyobb különbség 28 pont, a legkisebb pedig 3 pont.

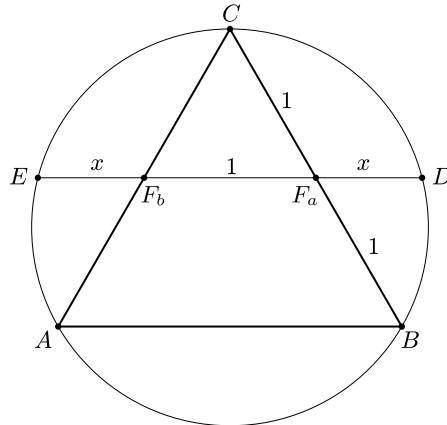
6. a) Az ABC szabályos háromszög oldalhossza 2 cm. Az AC és a BC oldal felezőpontjaira illeszkedő egyenes a háromszög köré írt körét a D , illetve az E pontokban metszi. Legyen a D a BC oldal F_a felezőpontjához közelebbi metszéspont. Határozzuk meg az F_aD távolságot.

b) Egy szabályos háromszög magassága 10 cm hosszú. Az egyik oldallal párhuzamos egyenes a háromszöget két olyan részre vágja, melyeknek a kerülete egyenlő.

i) Mekkora az egyenes távolsága a vele párhuzamos oldaltól?

ii) A háromszöget a magassága mentén megforgatjuk. Mekkora a keletkezett két test térfogata? (16 pont)

Megoldás. a) I. megoldás. A kérdéses távolságot jelölje x (1. ábra).



1. ábra

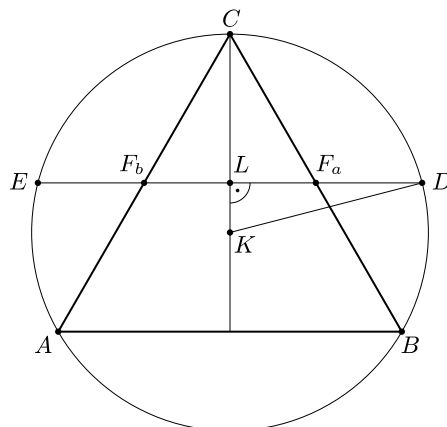
$F_aF_b = 1$, mert középvonal az ABC háromszögben. A szelőszakaszok tétele miatt

$$EF_a \cdot F_aD = CF_a \cdot F_aB,$$

azaz $(1+x)x = 1$, amiből rendezve az $x^2 + x - 1 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk.

Az egyenlet megoldása: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, amiből csak a nemnegatív $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ érték megoldása a feladatnak.

II. megoldás. Használjuk a 2. ábra jelöléseit!



Az ABC háromszög magassága $\sqrt{3}$. K harmadolja a magasságot, ezért $CK = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. (Ez egyben a köré írt kör r sugara is.)

Az $F_a F_b C$ háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, a hasonlósági arány $\frac{1}{2}$, ezért $CL = \frac{\sqrt{3}}{2}$, és

$$LK = CK - CL = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

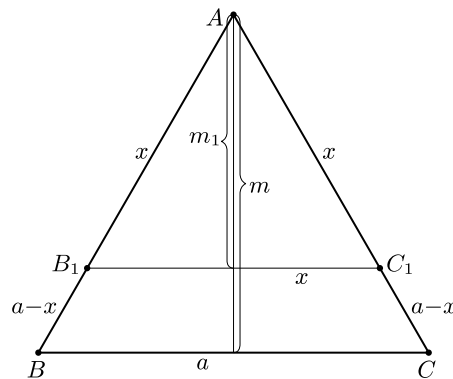
Az LKD háromszög derékszögű, ezért

$$LD^2 = r^2 - LK^2 = \frac{12}{9} - \frac{3}{36} = \frac{5}{4}, \quad \text{és} \quad LD = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Így } x = LD - LF_a = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

b) Használjuk a 3. ábra jelöléseit! A kerületek egyenlőségét felírva:

$$3x = x + a + 2(a - x).$$



3. ábra

Rendezve és x -et kifejezve kapjuk, hogy $x = \frac{3}{4}a$. Figyelembe véve az ABC és az AB_1C_1 háromszögek hasonlóságát, a hasonlóság aránya: $\frac{m_1}{m} = \frac{x}{a} = \frac{3}{4}$, amiből

$$m_1 = \frac{3}{4}m = \frac{3}{4} \cdot 10 = 7,5 \text{ cm.}$$

Az egyenes távolsága a párhuzamos oldaltól $10 \text{ cm} - 7,5 \text{ cm} = 2,5 \text{ cm}$.

A nagy kúp sugarát az $m = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ összefüggésből számolva (mindent két tizedesjegyre kerekítve): $r = \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}m = \frac{10}{\sqrt{3}} = 5,77 \text{ cm}$. A két kúp hasonlóságát felhasználva, a kis kúp és a nagy kúp térfogatának az aránya: $0,75^3$. A nagy kúp térfogata: $V = \frac{r^2}{3}\pi \cdot m = 348,64 \text{ cm}^3$. A kis kúp térfogata: $V_1 = 348,64 \cdot 0,75^3 = 147,08 \text{ cm}^3$, a maradék rész a csonkakúp térfogata:

$$V_{\text{cs}} = 348,64 - 147,08 = 201,56 \text{ cm}^3.$$

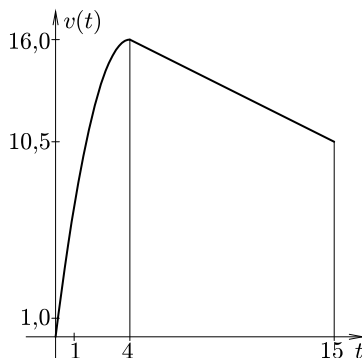
7. A haditengerészet tengeralattjáróinak védelme elsőrendű fontosságú feladat, mert a víz alatt számtalan veszély leselkedik ezekre a mélytengeri hajókra. A védettséget a mozgékonyaságukkal lehet leginkább fokozni, ezért kifejlesztettek egy olyan újfajta meghajtást, amely a tengeralattjáró sebességét a lebegésből (álló helyzetből) a $v(t) = -t^2 + 8t$ sebességfüggvény szerint változtatja a $0 \leq t \leq 4$ másodpercekben. Itt a pillanatnyi sebességet a képlet szerint $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ -ban kapjuk. Ezután a sebesség másodpercenként $0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ -mal egyenletesen csökken.

Egy tengeralattjárót jól védettnek neveznek, ha lebegésből 15 másodperc alatt a hosszánál nagyobb mértékben képes elmozdulni. Tudjuk, hogy az elmozdulásfüggvény $s(t)$ deriváltja a $v(t)$ sebességfüggvény.

a) Jól védett kategóriába tartozik-e a 170 m hosszú tengeralattjáró?

b) Tekintsük az $f(x) = -(x - 3)^2 + 9$ függvény görbét a $[0; 6]$ intervallumon. Legyen a görbe egy pontja $P(a; y)$. Tudjuk, hogy a P pontra illeszkedő $y = mx$ egyenletű egyenes felezi az $f(x)$ függvény görbéjét, az $x = a$ egyenletű egyenes és az x tengely által meghatározott zárt síkidom területét. Adjuk meg m értékét és az egyenes egyenletét. (16 pont)

Megoldás. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a $v(t)$ függvényt, és a lassulási fázist leíró elsőfokú függvényt.

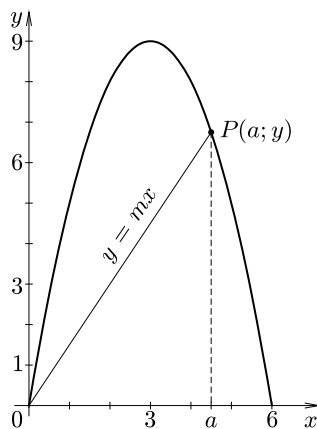


a) A tengeralattjáró 15 másodperc alatt megtett útja két részből tevődik össze, ezek összegét képezzük. Az első rész a $v(t)$ függvény görbéje alatti területtel adható meg. A második, a lassulási fázis egy trapéz területével adható meg. A trapéz magassága 11, alapjai $v(4) = 16$ és a 15. másodpercben a tengeralattjáró pillanatnyi sebessége, ami $16 - 11 \cdot 0,5 = 10,5$.

$$\int_0^4 (-t^2 + 8t) dt + \frac{16 + 10,5}{2} \cdot 11 = \left[-\frac{t^3}{3} + 4t^2 \right]_0^4 + 145 \frac{3}{4} = \frac{128}{3} + 145 \frac{3}{4} = 188 \frac{5}{12} \text{ m,}$$

a tengeralattjáró jól védett.

b) Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az f függvényt.



Az f függvényt átalakítva $f(x) = -(x - 3)^2 + 9 = -x^2 + 6x$. Az y koordinátát kifejezve $a^2 + 6a$ adódik. A területre vonatkozó feltétel miatt:

$$\int_0^a (-x^2 + 6x) dx = a(-a^2 + 6a).$$

Az egyenlet, amit meg kell oldanunk:

$$\left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^a = a(-a^2 + 6a).$$

A két oldal szorzat alakja:

$$a^2 \left(-\frac{a}{3} + 3 \right) = a^2(-a + 6),$$

ennek $a = 0$ nem a feladat szövegének megfelelő megoldása. Az egyenletet rendezve: $\frac{2}{3}a = 3$, ennek a megoldása $a = \frac{9}{2}$, így az y értéke:

$$-\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{4},$$

amiből a meredekség: $\frac{27}{4} : \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$, tehát az egyenes egyenlete: $y = \frac{3}{2}x$.

8. a) A $4n^4 + 1$ kifejezés milyen n természetes szám esetén lesz pozitív prímszám?

b) Oldjuk meg a természetes számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$2a^2b^3 + 10b^3 = 15a^2 + 224. \quad (16 \text{ pont})$$

Megoldás. a) Alakítsuk a kifejezést szorzattá:

$$4n^4 + 1 = 4n^4 + 4n^2 + 1 - 4n^2 = (2n^2 + 1)^2 - (2n)^2,$$

alkalmazva a megfelelő azonosságot a $(2n^2 + 2n + 1)(2n^2 - 2n + 1)$ alakot kapjuk. Mivel ez prím, és $n \geq 0$, ezért mindkét tényező pozitív kell legyen. Tehát az egyik tényező 1, a másik pedig prím, és az első tényező nagyobb a másodiknál. Tehát csak a $2n^2 - 2n + 1 = 1$ teljesülhet. Így $2n^2 - 2n = 0$, melynek megoldásai a 0 és az 1. $n = 0$ esetén a másik tényező is 1, $n = 1$ esetén a másik tényező 5, ami jó megoldás. Összefoglalva egyedül $n = 1$ a megoldás, amire a kifejezés értéke: 5

b) Alkalmazzunk megfelelő helyettesítéseket. Legyen $x = a^2$ és $y = b^3$, ekkor

$$2xy + 10y = 15x + 224,$$

$$2y(x + 5) = 15x + 224,$$

$$2y(x + 5) - 15x = 224,$$

$$2y(x + 5) - 15(x + 5) + 75 = 224,$$

$$(x + 5)(2y - 15) = 149.$$

Mivel $x + 5 > 0$, ezért $2y - 15 > 0$ is fennáll. 149 prím, ezért a lehetséges felbontások

$$\begin{cases} x + 5 = 1, \\ 2y - 15 = 149, \end{cases} \quad \text{valamint} \quad \begin{cases} x + 5 = 149, \\ 2y - 15 = 1. \end{cases}$$

Az első lehetőségből $x = -4$ és $y = 82$ adódna, ami lehetetlen, a második egyenletrendszer megoldásai $x = 144$ és $y = 8$.

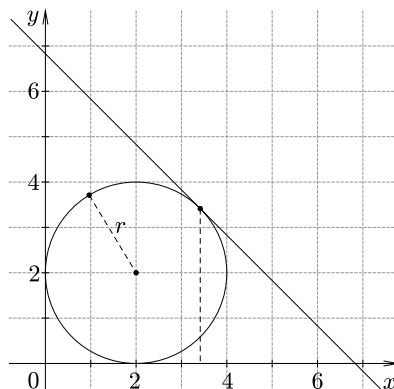
A megoldások tehát $a = 12$ és $b = 2$.

9. Adott a koordináta-rendszerben az $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ egyenletű kör.

a) A zárt körlap a koordináta-rendszer hány darab rácspontját fogja lefedni?

b) Húzzunk a körhöz érintőket az első síknegyedben. Ezen érintők közül melyik az, amely a koordináta-tengelyekkel a legkisebb területű háromszöget határozza meg? Írjuk fel az érintő egyenes egyenletét. (16 pont)

Megoldás. a) A kör egyenlete teljes négyzetté alakítva: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Ez tehát egy olyan kör, amely a tengelyeket érinti. Készítsünk ábrát.



A kör kerületén 4 db rácspont van. Belsejében pedig a 3-3 rácsegyenes metszéspontjai a megfelelők. Így $4 + 3 \cdot 3 = 13$ ilyen pont adódik.

b) Feladatunk elemi geometriai megfogalmazásban tehát az, hogy adott beírható kör sugár esetén, melyik derékszögű háromszög lesz minimális területű. Megmutatjuk, hogy ez éppen az egyenlőszárú derékszögű háromszög.

Ismeretes, hogy a háromszög területe $t = \frac{1}{2}r(a + b + c)$. Felhasználva Pitagorasz tételét, $t = \frac{1}{2}r(a + b + \sqrt{a^2 + b^2})$. Használjuk most fel a számtani és mértani, valamint a négyzetes és mértani közép közti összefüggéseket:

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \sqrt{ab}.$$

Így $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{2}\sqrt{ab}$ adódik, amit behelyettesítve a terület

$$t \geq \frac{1}{2}r\sqrt{ab}(2 + \sqrt{2}).$$

A minimális terület $a = b$ esetén valósul meg, vagyis akkor, amikor a háromszög egyenlő szárú. Mivel a háromszög derékszögű, $t = \frac{ab}{2}$. Négyzetre emelés és egyszerűsítések után adódik, hogy $t = \frac{1}{2}r^2(2 + \sqrt{2})^2$. A mi esetünkben a kör sugara 2 egység, tehát a minimális terület $t_{\min} = 2(2 + \sqrt{2})^2$. Mivel a háromszög egyenlő szárú, az oldal hosszára $a = 2(2 + \sqrt{2})$ adódik. Így a keresett egyenes egyenlete $y = mx + b$ alakot használva $y = -x + 4 + 2\sqrt{2}$.