

## I. rész

1. Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán:

a)  $\sqrt{x+12} + \sqrt{x-12} = 6$ ;

b)  $3^{\lg x^2} + 3^{1+\lg x} = 108$ .

(12 pont)

2. Az  $\{1; 2; 3; 4; \dots; 400\}$  számhalmaz elemei közül kiválasztunk egyet véletlenszerűen. (Mindegyiket egyenlő eséllyel.) Mekkora a következő események valószínűsége:

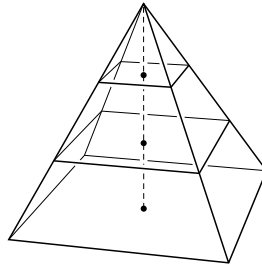
a) A húzott szám osztható 3-mal, de nem osztható 4-gyel;

b) A húzott szám osztható 3-mal, 4-gyel vagy 5-tel;

c) A húzott szám számjegyeinek összege 5?

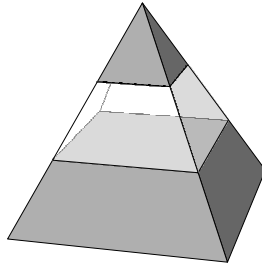
(14 pont)

3. a) Egy szabályos négyoldalú gúlát az alaplappal párhuzamos, a magasság harmadolópontjain átfektetett két síkkal három részre osztunk. A középső, csonkagúla alakú rész térfogata  $28 \text{ m}^3$ . Számítsuk ki a teljes gúla térfogatát.



b) Az előbbi gúla egy köztéri alkotásnak szánt kisebb épület, alapéle 6 m. Felszínét a középső részen üveg borítja. Mekkora az üvegezett felület?

(14 pont)



4. Egy hat elemű adathalmaz átlaga 10. Az első négy adat: 6, 11, 14, 8.

a) Mennyi a hiányzó két adat átlaga?

b) Adjuk meg a hiányzó két adatot, ha az adathalmaz szórása  $\sqrt{7}$ .

(12 pont)

## II. rész

5. Egy társasjáték kelleke 80 darab kártyalap, amelyeken kék vagy piros színnel egy-egy írásjel látható. A jelek 30%-a kérdőjel, 45%-a felkiáltójel, a többi pont. A piros írásjeleknek  $3/8$  része, a kéknek  $1/6$  része pont.

a) Hány kék, illetve piros lap van a pakliban?

Ha a játék során tíz alkalommal húzok a pakliból (a húzott lapokat mindig visszatesszük, és újrakeverjük a kártyákat), mekkora a valószínűsége, hogy

b) egy kérdőjelet sem húzok;

c) 3-nál több kérdőjelet húzok?

d) Mennyi a húzott kérdőjelek számának várható értéke?

(16 pont)

6. a)  $(a_n)$  és  $(b_n)$  pozitív tagú mértani sorozatok, hányadosuk 1,5, illetve 2. Állapítsuk meg az alábbi sorozatokról, hogy mértani sorozatok, illetve számtani sorozatok-e, és ha igen, adjuk meg a hányadost ( $q$ ), illetve a differenciát ( $d$ ).

	mértani	számtani	mindkettő	egyik sem	$q$	$d$
az $a_n$ és $b_n$ oldalú téglalap területe						
az $a_n$ oldalú kocka átlója						
$\lg b_n$						
$10^{b_n}$						
$\frac{b_{n+5}}{b_n}$						

b) A fent említett  $(a_n)$  sorozat első tagja 0,2. Számítsuk ki az

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \frac{1}{a_{n+3}} + \dots$$

végtelen sor összegének pontos értékét.

c) Egy nyolctagú számtani sorozat páratlan indexű tagjainak összege 8,8, páros indexű tagjainak összege 10,4. Adjuk meg a nyolc tagot. (16 pont)

7. a)  $ABCD$  húrtrapéz, hosszabbik alapja az  $AB$  oldal. A trapéz köré írt körhöz érintőt húzunk a  $B$  és a  $C$  csúcsban, a metszéspontot  $E$ -vel jelölve  $\angle CEB = 110^\circ$ . Milyen szögben metszik egymást a trapéz átlói?

b)  $ABCD$  húrtrapéz, hosszabbik alapja az  $AB$  oldal,  $A(-8; 10)$ ,  $B(12; 0)$ . Tudjuk továbbá, hogy a  $D$  csúcs az  $y$  tengely pozitív félegyenesére illeszkedik, és az átlók merőlegesek egy-egy szárra. Határozzuk meg a  $C$  és a  $D$  csúcs koordinátáit. (16 pont)

8. a) Egy síkságon futó egyenes vasúti szakasz két állomásépületének távolsága 1,7 km. A vasútvonaltól távolabb álló toronyház teteje az egyik állomásról  $5,72^\circ$ -os, a másiktól  $2,87^\circ$ -os emelkedési szögben látszik. A torony tövéénél állva a két állomás közötti szakasz  $162^\circ$ -os szögben látható. Készítsünk ábrát. Adjuk meg a torony magasságát egész méterre kerekítve.

b) Egy háromszög két oldala 70 m és 110 m, a velük szemközti szögek különbsége  $30^\circ$ . Mekkora a háromszög szögei? (Az eredményeket egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.) (16 pont)

9. a) Adjuk meg az  $f$  harmadfokú függvényt, ha egyik zérushelye az 1, deriváltja az  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$  függvény.

b) Jelölje  $p$  a  $g(x) = \sin \frac{x}{3}$  függvény legkisebb pozitív zérushelyét. Számítsuk ki a  $[0; p]$  intervallumon a  $g$  függvény grafikonja és az  $x$  tengely közé eső zárt területet.

c) A  $h(x) = -x^2 + 16$  függvény grafikonja és az  $x$  tengely által határolt síkidomot megforgatjuk az  $y$  tengely körül. Mekkora az így kapott forgástestbe írható maximális térfogatú henger térfogata? (16 pont)