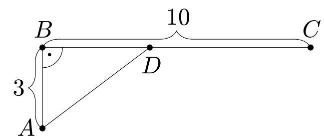
A változatosság gyönyörködtet – tartja a mondás. Egy matematikai probléma szépségét például gyakorta a megoldáshoz vezető utak sokszínűsége és egymásba fonódása adja. A különféle nézőpontok szerepet játszhatnak a mélyebb megértésben és egymástól távolinak tűnő területek összekapcsolásában, amint ennek a KöMaL hasábjain sűrűn szemtanúi lehetünk. Írásunkban is éppen a megoldások roppant gazdagságának érzékeltetését tűzzük ki célul, méghozzá a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium matematika munkaközössége által összeállított és a 2016. márciusi számban megjelent, az emelt szintű matematika érettségire való gyakorlást szolgáló feladatsor egy szélsőérték-feladata kapcsán.

Feladat. Egy gyalogos a hóval borított mező A pontjában van, 3 kilométernyire a BC egyenes úttól (az *1. ábrán* $AB=3$ km, $BC=10$ km). Az országúton a gyalogos kétszer akkora sebességgel halad, mint a hómezőn. Mely D pontban kell kimennie a gyalogosnak az útra, hogy a legrövidebb idő alatt jusson el C-be?

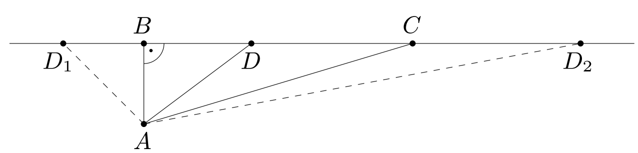


1. ábra

Az áprilisi számban a kitűzők igazán tetszetős módon négy különböző megoldását mutatták be az iménti feladatnak: egy algebrai, egy függvénytani és egy elemi geometriai utat, valamint az optika Snellius–Descartes-féle fénytörési törvényén alapuló fizikai szemléletű megközelítést. Célunk, hogy mindezt megtoldjuk további megoldásokkal, segítségül hívva nevezetes egyenlőtlenségeket és a mechanikát. Felbukkan a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség, a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség, valamint a húrnégyszögek Ptolemaiosz-egyenlőtlensége. Szó esik ezenkívül még az Euler-féle helyettesítésekről, négyzetszámok táblázatairól, hullámfrontokról, erők eredőjéről és mindemellett a matematikatörténeti érdekességek sem maradnak el. Közben pedig számos töprengési lehetőséget és bőséges olvasnivalót kínálunk az érdeklődő Olvasó számára. Javasoljuk, hogy a továbbhaladás előtt próbálkozzon meg minél többféle megoldás önálló kigondolásával, majd ezután az áprilisi szám megfelelő oldalaira ugyancsak érdemes visszalapoznia. A megoldások színes és szerteágazó sokaságán keresztül remélhetőleg feltárulnak a feladat rejtett kincsei és alkalom nyílik a gyönyörködésre.

1. Kezdeti lépések a havon

Jóllehet a feladat szövege és az 1. ábra is azt sugallja, hogy a D pontnak a BC szakaszon kell lennie, mindenesetre nem árt meggondolnunk, hogy az időben legrövidebb út szempontjából a BC egyenes többi pontját kizárhatjuk. Valóban, ha a *2. ábrán* látható módon a D_1 pont a BC egyenesen B-től balra van, akkor nyilván $BC<D_1C$, továbbá az ABD_1 derékszögű háromszögben AD_1 átfogó, ezért $AB<AD_1$. Következésképpen az ABC töröttvonal mindkét szakasza rövidebb az AD_1C töröttvonal megfelelő szakaszainál, így a megtételükhöz is kevesebb idő kell, tehát van az AD_1C töröttvonalnál időben rövidebb út. Amennyiben egy, a C-től jobbra eső D_2 pontot tekintünk, akkor $D_2CA\sphericalangle$ tompaszög (miért?), emiatt a D_2CA háromszögben AD_2 a leghosszabb oldal, így már önmagában az AD_2 út megtétele több időbe telik, mint egyszerűen az AC szakaszon végigmenni.



2. ábra

Ezek után legyen a gyalogos sebessége a hómezőn v, az országúton pedig $2v$ (ahol $v>0$), ekkor az ADC töröttvonal út megtételéhez szükséges idő:

$$\frac{AD}{v}+\frac{DC}{2v}=\frac{1}{v}\left(AD+\frac{DC}{2}\right). \tag{1.1}$$

Világos, hogy a minimum helyének szempontjából v nem játszik szerepet, ezért elég csupán a zárójelben lévő kifejezést vizsgálni (más szóval feltehető $v=1$), amelyet írjunk fel a D pont B-től (km-ben) mért távolságának függvényében a KöMaL áprilisi számában közölt első megoldáshoz hasonlóan.

Ha $BD=x$, ahol $0\le x\le 10$, akkor $DC=10-x$, továbbá az ADB derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján $AD=\sqrt{x^2+9}$, így

$$AD+\frac{DC}{2}=\sqrt{x^2+9}+\frac{10-x}{2}. \tag{1.2}$$

Elegendő tehát az

$$f(x) := \sqrt{x^2+9} + \frac{10-x}{2} \tag{1.3}$$

függvény minimumának helyét megkeresni $0 \le x \le 10$ esetén. Az áprilisi szám 204–206. oldalain erre két okoskodást olvashattunk: az egyik egy másodfokú paraméteres egyenlet diszkriminánsának vizsgálatára vezeti vissza a kérdést, a másik pedig differenciálszámítás segítségével adja meg a szélsőértékhelyet. Most az (1.3) hozzárendelési szabályban szereplő négyzetgyök kiküszöbölésére először egy rafinált helyettesítést mutatunk.

2. Egy ravasz gondolat

A szakasz gondolatmenete a „hómezős” feladattal együtt megtalálható *Hódi Endre* (1923–2003) – aki sok éven át a matematikai diákolimpiai csapat kísérője és a tehetséggondozás aktív szereplője volt – szélsőérték-feladatok elemi megoldásáról szóló remek könyvecskéjében (lásd [2, 109–112. feladat]). A megoldásnak erre az ötletére e sorok írójának figyelmét *Németh József,* a szegedi Bolyai Intézet kitűnő oktatója hívta fel, aki a mindennapi életben előforduló szélsőérték-problémákról tartott előadásában a hómezős feladat olajvezeték építési költségének minimalizálására átfogalmazott változatát (lásd [5, 8. feladat]) oldotta meg az egykori mesterétől, – a nemzetközileg kiemelkedő matematikus és tanáregyéniség – *Kalmár Lászlótól* (1905–1976) tanult elemi módszerrel. Lássuk az ötletet!

Célunk, hogy az (1.3) kifejezésben szereplő négyzetgyök használatát egy ügyes helyettesítéssel elkerüljük. Ehhez induljunk ki a jól ismert

$$(u+v)^2 - (u-v)^2 = 4uv \tag{2.1}$$

algebrai azonosságból. Ha most $v = \dfrac{1}{4u}$, akkor ebből átrendezés után

$$\left(u - \frac{1}{4u}\right)^2 + 1 = \left(u + \frac{1}{4u}\right)^2$$

adódik. Még praktikusabb, ha az iménti összefüggés 9-szeresét tekintjük:

$$\left[3\left(u - \frac{1}{4u}\right)\right]^2 + 9 = \left[3\left(u + \frac{1}{4u}\right)\right]^2, \tag{2.2}$$

hiszen ez nyomban az $x = 3\left(u - \dfrac{1}{4u}\right)$ vagy $x = -3\left(u - \dfrac{1}{4u}\right)$ helyettesítést sugallja. Ekkor ugyanis $u > 0$ feltételezésével (2.2) alapján

$$\sqrt{x^2+9} = 3\left(u + \frac{1}{4u}\right). \tag{2.3}$$

Ha például az

$$x = 3\left(u - \frac{1}{4u}\right) \tag{2.4}$$

helyettesítést választjuk, akkor

$$\sqrt{x^2+9} + \frac{10-x}{2} = 3\left(\frac{u}{2} + \frac{3}{8u}\right) + 5. \tag{2.5}$$

Ezáltal a minimalizálandó kifejezésünk egy csapásra olyan alakot öltött, amely tálcán kínálja a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazását: tetszőleges u pozitív számra

$$3\left(\frac{u}{2} + \frac{3}{8u}\right) + 5 \ge 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{u}{2} \cdot \frac{3}{8u}} + 5 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 5. \tag{2.6}$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $u/2 = 3/(8u)$, ahonnan $u > 0$ folytán $u = \sqrt{3}/2$ következik, és ekkor a (2.4) helyettesítés értelmében $x = \sqrt{3}$. Mivel ez megfelel a $0 \le x \le 10$ kívánalomnak, így a (2.5) és (2.6) összefüggések figyelembevételével azt kapjuk, hogy az f függvény a $[0, 10]$ intervallumon a minimumát az $x = \sqrt{3}$ pontban veszi fel (és a minimum értéke $3\sqrt{3}/2 + 5$).

Álljunk csak itt meg egy pillanatra, biztosan nem felejtettünk el semmit az előbbi gondolatmenetben? Hogyan is okoskodtunk? Meghatároztuk a (2.5) azonosság jobb oldalának minimumhelyét a pozitív u számok halmazán és ebből a bal oldali kifejezés $0 \le x \le 10$ esetén vett minimumának helyére következtettünk. De milyen x értékekre érvényes egyáltalán a szóban forgó (2.5) azonosság? Olyan x valós számokra, amelyek előállnak (2.4) alakban valamilyen $u > 0$ esetén. Vajon előáll minden $x \in [0, 10]$ szám ilyen módon? Nem fordulhat elő, hogy „bizonyos" $x \in [0, 10]$ számok esetleg nem írhatók fel (2.4) alakban és ráadásul ezekre az x-ekre f kisebb értéket vesz fel, mint a $\sqrt{3}$ pontban? Szerencsére a (2.4) összefüggés u-ra nézve valójában egy másodfokú egyenletre vezet, így gond nélkül megoldhatjuk:

$$u_1 = \frac{1}{6}\left(x + \sqrt{x^2+9}\right) \quad \text{és} \quad u_2 = \frac{1}{6}\left(x - \sqrt{x^2+9}\right).$$

Minthogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt{x^2+9} > \sqrt{x^2} = |x| = \max\{x, -x\}$ (egy x szám abszolút értéke x és $(-x)$ közül a nemnegatív, vagyis a nem kisebbik), ezért $u_1 > 0$, $u_2 < 0$. Ez azt jelenti, hogy bármely x valós számhoz egyértelműen létezik olyan u pozitív szám (és ezenfelül egy negatív is), amellyel x előáll (2.4) alakban, mégpedig

$$u = \frac{1}{6}\left(x + \sqrt{x^2+9}\right), \tag{2.7}$$

következésképpen a (2.4) helyettesítés egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést – más szóval bijekciót – ad meg a valós és a pozitív valós számok halmaza között (és emellett a valós és a negatív valós számok között is). A szemfülesebbek minderre természetesen a (2.3) és (2.4) összefüggések tükrében egyenletmegoldás nélkül is következtethetnek, az analízisben jártasak pedig akár elvégezhetik az $u \mapsto u - \dfrac{1}{4u}$ függvény teljes vizsgálatát.

Összefoglalva, a (2.5) azonosság érvényes minden $0 \le x \le 10$ esetén valamely $u > 0$ számmal, ezért csakugyan helyesen következtettünk a bal oldal minimumának helyére a jobb oldal pozitív számokon vett minimumhelyéből, így az f függvény a $[0, 10]$ intervallumon a legkisebb értékét az $x = \sqrt{3}$ pontban veszi fel. A gyalogosnak tehát a B-től $\sqrt{3}$ km-re lévő D pontban kell kimennie az országútra, hogy a legrövidebb idő alatt érjen a C pontba.

2.1. megjegyzés. Ha (2.4) helyett $x = -3\left(u - \dfrac{1}{4u}\right)$, akkor $u > 0$ folytán

$$u = \frac{1}{6}\left(\sqrt{x^2+9} - x\right), \tag{2.8}$$

és ennek segítségével az előzőekhez hasonlóan vizsgálhatjuk az f függvényt. Sőt, a (2.1) azonosságban $v = \dfrac{1}{4u}$ helyett választhatunk más u, v párokat, a lényeg csupán, hogy a $4uv = 1$ összefüggés fennálljon – a különféle esetek mélyrehatóbb vizsgálatát az Olvasóra bízzuk.

A (2.7) vagy (2.8) helyettesítésekre rábukkanhatunk úgy is, ha a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség lebeg a szemünk előtt. A megfelelő alsó becslés érdekében ekkor olyan mennyiségeket célszerű felfedeznünk az f függvény (1.3) alakjában, amelyek szorzata állandó. És lám:

$$\left(\sqrt{x^2+9} + x\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+9} - x\right) = \left(\sqrt{x^2+9}\right)^2 - x^2 = 9.$$

Mindezek a helyettesítések valójában már nagyon régen felbukkantak a matematikában, erről a következő szakaszban mesélünk.

3. Pihenő: négyzettáblázatok, Euler-helyettesítések

Ebben a részben egy csöppet még elidőzünk a (2.1) azonosság, valamint a (2.7), (2.8) helyettesítésekkel kapcsolatban felmerülő érdekességek és történeti háttér mentén. Mindez nem feltétlenül tartozik szorosan a megoldások folyamába, ezért első olvasásra nyugodtan a következő szakaszra lehet ugrani.

Szorzás és négyzetre emelés. Kezdjük először a (2.1) azonossággal, amelyet úgy is írhatunk, hogy

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = uv. \tag{3.1}$$

Ez azt fejezi ki, hogy két szám szorzatának kiszámítása megfelelő értelemben visszavezethető négyzetre emelésekre. Első ránézésre a formula összetettnek tűnik, ám nagy számok esetén hatékonyabb módszert adhat a szorzás közvetlen elvégzésénél. Ezt a 19. század elejétől kezdve többen felismerték és készítettek az egész számok négyzeteihez kapcsolódó táblázatokat. *Jakob Philipp Kulik* (1793–1863) osztrák matematikus 1851-ben például az 1-től 29 999-ig terjedő egész számok négyzeteinek 1/4-szeresét foglalta táblázatba. Erről bővebben olvashatunk a [6] cikkben, ezenkívül a [7] weboldalon számos, az 1500-as évektől kezdődően készült, a kézi számolást segítő táblázatot tanulmányozhatunk. Természetesen a modern számítógépek elterjedésével ezek a táblázatok – ahogyan a középiskolai négyjegyű függvénytáblázat különböző számtáblázatai – fokozatosan jelentőségüket vesztették.

A szorzás négyzetre emelésre való visszavezetése nemcsak a konkrét számolásokat teheti könnyebbé, hanem elméleti okoskodásokban szintén hasznunkra válhat. Ha összeadás, kivonás, számmal való szorzás, valamint négyzetre emelés során megőrződik valamely tulajdonság – ezt sok esetben könnyű igazolni –, akkor ezt a tulajdonságot általában a szorzás ugyancsak megtartja. Ily módon is igazolható például, hogy két konvergens sorozat szorzatának határértéke a két sorozat határértékének szorzata, vagy bizonyítható a differenciálható függvények szorzatának deriválására vonatkozó Leibniz-formula, vagy éppen két Riemann-integrálható függvény szorzatának integrálhatósága – többek között Kalmár László szintén így szerette tanítani, lásd a [3] tankönyvének megfelelő részeit. Illusztrációképpen álljon itt a szorzat deriválási szabályának a (2.1) azonosságra támaszkodó szellemes bizonyítása: ha már tudjuk, hogy tetszőleges $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényekre és λ valós számra $(f+g)' = f' + g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$, valamint $(f^2)' = 2ff'$, akkor

$$(fg)' = \left(\left(\frac{f+g}{2}\right)^2 - \left(\frac{f-g}{2}\right)^2\right)' =$$
$$= 2 \cdot \frac{f+g}{2} \cdot \frac{f'+g'}{2} - 2 \cdot \frac{f-g}{2} \cdot \frac{f'-g'}{2} = f'g + fg'.$$

Megemlítjük, hogy *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) német filozófus és matematikus – a differenciál- és integrálszámítás felfedezője Newton mellett – 1675. november 11-ei kéziratában még tévesen úgy vélte, hogy szorzat deriváltja a tényezők deriváltjainak szorzata, ám tíz napra rá már tudta a helyes összefüggést (Leibnizről bővebben lásd az [1] könyv megfelelő fejezetét).

Euler és a helyettesítések. A (2.7) vagy (2.8) helyettesítésekre visszakanyarodva érdemes kiemelnünk, hogy ezeket *Leonhard Euler* (1707–1783) svájci matematikus – a matematikatörténet egyik legsokoldalúbb és legtermékenyebb géniusza – részletesen tárgyalta 1748-ban kiadott Introductio in analysin infinitorum (Bevezetés a végtelenek analízisébe) című kétkötetes művében, amelyben összefoglalta mindazt, ami szerinte az elenyészően kis mennyiségek analíziséhez szükséges. Az első kötet 3. fejezetében Euler többek között az $y(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ alakú négyzetgyökös kifejezések racionális törtfüggvénnyé (azaz két polinom hányadosává) való alakításához adott meg helyettesítéseket. Ha a $p(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom mindenhol pozitív értékű, akkor szükségképpen $a > 0$ és $c = p(0) > 0$, és ekkor az

$$u = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x \quad \text{vagy} \quad u = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{c}}{x} \tag{3.2}$$

új változókat vezette be Euler, amelyekre napjainkban Euler-féle helyettesítésekként szokás hivatkozni. Valójában mindkét képletben különbség helyett összeg is vehető, és így az elsőből lényegében megkapjuk a (2.7), (2.8) helyettesítéseket. Az Olvasó számára javasoljuk annak ellenőrzését, hogy ezekkel a helyettesítésekkel y az u változónak valóban racionális törtfüggvényévé válik (voltaképpen mindezt végigcsináltuk a 2. szakaszban y helyett az f függvénnyel). Azon szintén érdemes eltűnődni, hogy vajon milyen helyettesítést javasolt Euler abban az esetben, amikor az $ax^2 + bx + c$ polinomnak két valós gyöke van. Ezután ugyancsak megéri Euler eredeti művébe belepillantani, amely mai szemmel is kiválóan érthető (az összes művei különféle fordításokban olvashatók a [8] weboldalon). Módszerei és meglátásai közül – amint a fenti példa jól mutatja – számtalan mindörökre beépült a matematikai gondolkodásba (Eulerről bővebben olvashatunk az [1] könyvben).

A (3.2) helyettesítések talán ismerősek lehetnek az integrálszámításban jártasak számára, hiszen ott gyakran van szükség négyzetgyökös, a $\sqrt{x^2+1}$ kifejezést tartalmazó integrálok kiszámítására. Persze, az

$$u = \sqrt{x^2+1} - x, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{u - \frac{1}{u}}{2}$$

új változó bevezetésénél túlnyomórészt a sokkal kényelmesebb úgynevezett hiperbolikus függvényeket használjuk, vagyis

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{sh} t,$$

ahol sh a szinusz hiperbolikusz függvény. A $\sqrt{x^2-1}$ alakú kifejezés pedig

$$x = \frac{u + \frac{1}{u}}{2} \quad \text{vagy} \quad x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t$$

helyettesítésekkel „racionalizálható”, ahol ch a koszinusz hiperbolikusz függvény, amelynek grafikonját láncgörbének szokás hívni, ugyanis ahhoz hasonló alakot vesz fel a két végén felfüggesztett lánc. (A szinusz és koszinusz hiperbolikusz függvényekről annyit máris tudunk, hogy $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, ami nem más, mint a (3.1) összefüggés egy újabb megnyilvánulási formája.) Végül pedig a $\sqrt{1-x^2}$ alakú kifejezés esetén a trigonometrikus $x = \sin t$ vagy $x = \cos t$ helyettesítés lehet a leginkább célravezető. Mindezekről (beleértve a láncgörbét) a [4] tankönyvben teljes részletességgel olvashatunk.

Hivatkozások

[1] Sz. G. Gingyikin, *Történetek fizikusokról és matematikusokról,* Harmadik kiadás, Typotex, Budapest, 2012.

[2] Hódi Endre, *Szélsőérték-feladatok elemi megoldása,* 3. kiadás, Typotex, Budapest, 1998.

[3] Kalmár László, *Bevezetés a matematikai analízisbe I–II.,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.

[4] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós Analízis I.,* TypoTEX, Budapest, 2012.

[5] Németh József, *Szélsőérték-problémák a mindennapi életben,* http://www.math.u-szeged.hu/~nemethj/orosh13.pdf.

[6] D. Roegel, A reconstruction of Kulik's table of multiplication (1851), http://locomat.loria.fr/kulik1851/kulik1851doc.pdf.

[7] Loria Collection of Mathematical Tables, http://locomat.loria.fr.

[8] Euler Archive, http://eulerarchive.maa.org.