Második nap[1]

4. *Pozitív egészek egy halmazát* illatosnak *nevezzük, ha legalább 2 eleme van, és minden eleméhez található legalább egy olyan másik eleme, hogy a két elemnek van közös prímosztója. Legyen $P(n) = n^2 + n + 1$. Mi a legkisebb olyan pozitív egész b érték, amihez található egy nemnegatív a egész szám úgy, hogy a*

$$\big\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\big\}$$

halmaz illatos?

Baran Zsuzsanna megoldása. Be fogjuk látni, hogy a legkisebb ilyen b pozitív egész a $b = 6$.

A feladat az, hogy minél kevesebb szomszédos pozitív egész számot kell találnunk úgy, hogy azok közül mindegyik P-jének legyen közös prímosztója valamelyik másik elem P-jével. Ehhez megvizsgáljuk, hogy közeli számok P-jeinek milyen közös prímosztója lehet, azaz hogy adott kicsi pozitív egész x-ekre milyen p prímre lehet $p \mid P(n)$ és $p \mid P(n+x)$ (n pozitív egész). Az $x = 1$, 2, 3 és 4-et fogjuk megvizsgálni.

Először is, mivel $n^2 + n = n(n+1)$ páros, ezért $P(n)$ mindig páratlan, így p nem lehet 2.

$x = 1$-re:

$$\begin{aligned}\big(n^2+n+1; (n+1)^2+(n+1)+1\big) &= \big(n^2+n+1; 2n+2\big) = \\ &= \big(n^2+n+1; n+1\big) = \big(n^2; n+1\big) = 1.\end{aligned}$$

Azaz $P(n)$-nek és $P(n+1)$-nek nem lehet közös prímosztója.

$x = 2$-re:

$$\begin{aligned}0 &\equiv n^2+n+1 \equiv (n+2)^2+(n+2)+1 = n^2+5n+7 \pmod p,\\ 0 &\equiv 4n+6 \pmod p,\\ 2n &\equiv -3 \pmod p,\\ 0 &\equiv 4n^2+4n+4 \equiv (-3)^2+2(-3)+4 = 7 \pmod p.\end{aligned}$$

Így csak akkor lehetséges $p \mid P(n)$ és $p \mid P(n+2)$, ha $p = 7$ és $2n \equiv -3 \equiv 4 \pmod 7$, így $n \equiv 2 \pmod 7$. Ilyenkor tényleg fennáll az oszthatóság: $2^2+2+1 \equiv 4^2+4+1 \equiv 0 \pmod 7$.

$x = 3$-ra:

$$\begin{aligned}0 &\equiv n^2+n+1 \equiv (n+3)^2+(n+3)+1 = n^2+7n+13 \pmod p,\\ 0 &\equiv 6n+12 \pmod p,\\ 3n &\equiv -6 \pmod p,\\ 0 &\equiv 9n^2+9n+9 \equiv (-6)^2+3\cdot(-6)+9 = 27 \pmod p.\end{aligned}$$

Így csak a $p = 3$ jöhet szóba.

Ekkor $1^2+1+1 \equiv 0 \pmod 3$, de $0^3+0+1 \equiv 2^2+2+1 \not\equiv 0 \pmod 3$, így az $n \equiv 1 \pmod 3$ jó, de más nem. Tehát $P(n)$ és $P(n+3)$ közös prímosztója csak a 3 lehet, mégpedig ha $n \equiv 1 \pmod 3$.

$x = 4$-re:

$$\begin{aligned}0 &\equiv n^2+n+1 \equiv (n+4)^2+(n+4)+1 = n^2+9n+21 \pmod p,\\ 0 &\equiv 8n+20 \pmod p,\\ 2n &\equiv -5 \pmod p,\\ 0 &\equiv 4n^2+4n+4 \equiv (-5)^2+2\cdot(-5)+4 = 19 \pmod p.\end{aligned}$$

Így csak a $p = 19$, $2n \equiv -5 \equiv 14 \pmod{19}$, azaz $n \equiv 7 \pmod{19}$ jöhet szóba. Ez megfelelő is: $7^2+7+1 \equiv 9^2+9+1 \equiv 0 \pmod{19}$. Tehát $P(n)$ és $P(n+4)$ közös prímosztója csak a 19 lehet, mégpedig ha $n \equiv 7 \pmod{19}$.

Most az eddigiek alapján próbáljunk létrehozni egy megfelelő 6 elemű halmazt. Szeretnénk egy olyan a-t találni, hogy $P(a+1)$-nek és $P(a+5)$-nek, $P(a+2)$-nek és $P(a+4)$-nek, illetve $P(a+3)$-nak és $P(a+6)$-nak legyen közös prímosztója.

Legyen $b = 6$ és $a \equiv 1 \pmod 3$, $a \equiv 6 \pmod{19}$ és $a \equiv 0 \pmod 7$ (ennek a kínai maradéktétel szerint van pozitív egész megoldása).

Ekkor $a+1 \equiv 7 \pmod{19}$, így $19 \mid P(a+1), P(a+1+4)$, míg $a+2 \equiv 2 \pmod 7$, így $7 \mid P(a+2), P(a+2+2)$, végül $a+3 \equiv a+6 \equiv 1 \pmod 3$, így $3 \mid P(a+3), P(a+6)$.

Így a fenti a mellett a $\big\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+6)\big\}$ halmaz mindegyik eleméhez található egy másik elem, amivel van közös prímosztója, azaz a halmaz illatos.

[1] Az első nap feladatainak megoldását az októberi számban közöltük.

Tegyük fel, hogy van kisebb megfelelő b is, azaz létezik $b \leq 5$ pozitív egész, amihez létezik a pozitív egész, hogy $\{P(a+1), \ldots, P(a+b)\}$ illatos.

Nem lehet $b = 2$ vagy $b = 3$, mert $P(a+2)$ relatív prím $P(a+1)$-hez és $P(a+3)$-hoz is.

Nem lehet $b = 4$, mert akkor $P(a+2)$ relatív prím $P(a+1)$-hez és $P(a+3)$-hoz, így $P(a+4)$-gyel kell közös prímosztója legyen, ami csak a 7 lehet ($P(n)$ és $P(n+2)$ közös prímosztója csak a 7 lehet). Hasonlóan $P(a+3)$-nak $P(a+1)$-gyel kell közös prímosztója legyen, de ez is csak a 7 lehet. Ez viszont azt jelentené, hogy $P(a+1)$ és $P(a+2)$ egyaránt oszthatóak 7-tel, ami ellentmondás.

Nem lehet $b = 5$ sem, mert akkor $P(a+3)$ relatív prím a szomszédjaihoz, így $P(a+1)$-gyel vagy $P(a+5)$-tel kell közös prímosztója legyen, ez a prímosztó pedig csak a 7 lehet. Ha $7 \mid P(a+3)$, akkor $7 \nmid P(a+2), P(a+4)$. Eközben $P(a+2)$ relatív prím a szomszédjaihoz és mivel nem osztható 7-tel, ezért relatív prím $P(a+4)$-hez is. Ekkor $P(a+5)$-tel kell közös prímosztója legyen, ami viszont csak a 3 lehet ($P(n)$ és $P(n+3)$ közös prímosztója csak a 3 lehet). Hasonlóan $P(a+4)$-nek $P(a+1)$-gyel kell közös prímosztója legyen, ami viszont szintén csak a 7 lehet. Ekkor azonban $7 \mid P(a+1)$ és $7 \mid P(a+2)$, ami ellentmondás.

Tehát mégsem lehet $b \leq 5$, a legkisebb megfelelő b szám a $b = 6$.

5. *Felírjuk a táblára az*

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

egyenletet, ahol mindkét oldalon 2016 *lineáris faktor szerepel. Mi az a legkisebb pozitív k érték, amelyre teljesül az, hogy elhagyhatunk e közül a* 4032 *lineáris faktor közül pontosan k darabot úgy, hogy mindkét oldalon maradjon legalább egy lineáris faktor, és az adódó egyenletnek ne legyen valós gyöke?*

Nagy Kartal megoldása. Első lépésként belátjuk, hogy $k > 2015$. Ha kevesebb, mint 2016 lineáris faktort törölnénk ki, akkor lesz egy lineáris faktor ami mindként oldalon fog szerepelni. Legyen ez az $(x-i)$ lineáris faktor. Ekkor i gyöke lesz az egyenletnek, hiszen ekkor mindkét oldal 0 lenne.

Most pedig megmutatjuk, hogy $k = 2016$-ra van megoldás. Legyen ez az egyenlet:

$$\begin{gathered}(x-1)(x-4)(x-5)(x-8)(x-9)\cdots(x-2013)(x-2016) = \\ = (x-2)(x-3)(x-6)(x-7)\cdots(x-2011)(x-2014)(x-2015).\end{gathered}$$

Most nézzük a két oldalt mint két függvényt. Legyen a bal oldal $g(x)$, a jobb oldal $f(x)$. Azt fogjuk belátni, hogy minden x-re $f(x) > g(x)$. Ezt esetenként vizsgáljuk.

1. Ha $x < 1$, akkor mindkét oldal pozitív lesz, így elég azt nézni, hogy $f(x)$ abszolút értéke nagy lesz $g(x)$-nek. Bontsuk részekre a függvényeket és hasonlítsuk azok alapján össze:

$$\big|\big(x-(4m+1)\big)\big(x-(4m+4)\big)\big| < \big|\big(x-(4m+2)\big)\big(x-(4m+3)\big)\big|.$$

Ezt átírhatjuk erre az alakra: $Y(3+Y) < (1+Y)(2+Y)$. A kibontás után látszik, hogy a jobb oldal valóban nagyobb, vagyis $g(x)$ tagjai párosíthatók $f(x)$ tagjaival úgy, hogy mindig az $f(x)$-es tag legyen a nagyobb. Vagyis ezen az intervallumon $f(x) > g(x)$.

2. Ha $x > 2016$, akkor hasonló módon végigvihető, hogy $f(x) > g(x)$.

3. Ha $1 \leq x \leq 2016$.

a) Ha x egész és $4m$ vagy $4m+1$ alakú, akkor $g(x) = 0$, $f(x) > 0$.

b) Ha x egész és $4m+2$ vagy $4m+3$ alakú, akkor $g(x) < 0$, $f(x) = 0$.

c) Ha $2m > x > 2m-1$, akkor $g(x)$ negatív, $f(x)$ pozitív.

d) Ha $4m < x < 4m+1$, akkor mindkét függvény pozitív. Vagyis az kell, hogy $\big|f(x)\big| > \big|g(x)\big|$. Itt is bontsuk részekre a függvényeket:

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = (x-2)(x-3), & f_2(x) = (x-6)(x-7), & \ldots, \\ g_1(x) = (x-1)(x-4), & g_2(x) = (x-5)(x-8), & \ldots. \end{array}$$

Itt is könnyen belátható, hogy $f_i(x) > g_i(x)$. Vagyis itt is igaz, hogy $f(x) > g(x)$.

e) Ha $4m+2 < x < 4m+3$, akkor mindkét függvény negatív, ezért azt kell belátni, hogy $\big|f(x)\big| < \big|g(x)\big|$. A részekre bontás itt így fog kinézni:

$$\begin{gathered} f_1(x) = (x-2), \quad f_2(x) = (x-3)(x-6), \quad \ldots, \\ f_{1008}(x) = (x-2011)(x-2014), \quad f_{1009}(x) = (x-2015), \\ g_1(x) = (x-1), \quad g_2(x) = (x-4)(x-5), \quad \ldots, \\ g_{1008}(x) = (x-2012)(x-2013), \quad g_{1009}(x) = (x-2016). \end{gathered}$$

Itt könnyen belátható, hogy $f_i(x) < g_i(x)$. Vagyis igaz, hogy $\big|g(x)\big| > \big|f(x)\big|$, azaz $f(x) > g(x)$.

Ezzel beláttuk, hogy a jobb oldal mindig nagyobb, mint a bal oldal, azaz nem lesz gyöke az egyenletnek.

A megoldás: $k = 2016$.

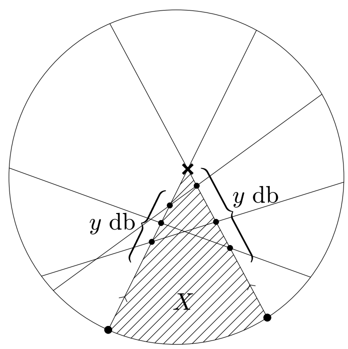
6. *Adott a síkon $n \geq 2$ szakasz úgy, hogy bármely két szakasz keresztezi egymást, és semelyik három szakasznak sincsen közös pontja. Jeromosnak ki kell választania mindegyik szakasznak az egyik végpontját, és oda egy-egy békát elhelyezni úgy, hogy a béka a szakasz másik végpontja felé nézzen. Ezután Jeromos $(n-1)$-szer fog tapsolni. Mindegyik tapsolásra minden béka azonnal a szakaszon található következő metszéspontra ugrik. A békák az ugrásirányukat soha nem változtatják meg. Jeromos úgy szeretné elhelyezni a békákat, hogy soha ne legyen két béka azonos időben azonos metszésponton.*

(a) *Bizonyítsuk be, hogy Jeromos ezt mindig meg tudja tenni, ha n páratlan.*

(b) *Bizonyítsuk be, hogy Jeromos ezt soha nem tudja megtenni, ha n páros.*

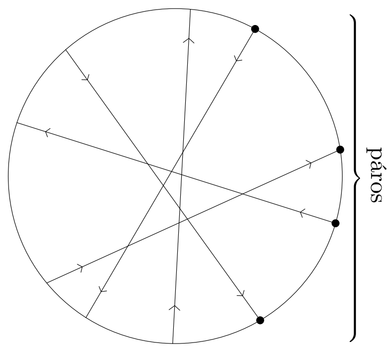
Gáspár Attila megoldása. Rajzoljunk egy olyan nagy kört, ami az összes szakaszt tartalmazza a belsejében. Hosszabbítsuk meg az összes szakaszt úgy, hogy a végpontjaik a körre kerüljenek. Két szakasz legfeljebb egy pontban metszheti egymást, ezért nem jön létre új metszéspont, tehát a hosszabbítás semmit nem befolyásol. Nevezzük a szakaszvégpontokat belépési és kilépési pontoknak attól függően, hogy indul-e belőle béka, vagy nem. Nyilvánvaló, hogy n db belépési és n db kilépési pont van.

Tegyük fel, hogy a körön van két szomszédos belépési pont. Az *1. ábrán* látható, a két szakasz metszéspontig tartó részei és a köztük lévő, más pontot nem tartalmazó körív által határolt alakzat legyen X. Látható, hogy mindegyik szakasz (az X-et határoló szakaszokat kivéve) 0 vagy 2 pontban metszi az X határvonalát, mert az X konvex. A körívet egyik sem metszi, ezért mindegyik a két szakaszt fogja metszeni. A két X-et határoló szakaszon így ugyanannyi metszéspont lesz, ez legyen y. Mivel $y \leq n-2$, ezért $y+1$ ugrás után a két béka összeütközik. Ez ellentmondás, tehát nem lehet két szomszédos belépési pont. Ha a békák $n-1$ helyett n-szer ugranak, akkor a kilépési pontokba érkeznek. Ilyenkor nem történhet ütközés, ezért ez nem módosítja a feladatot. Nyilvánvaló, hogy ha a békák nem ütköztek, akkor a kilépési pontokból indulva sem ütköznének, ekkor a lépéssorozat visszafelé játszódna le. Ebből következik, hogy nem lehet két szomszédos kilépési pont. Így a körön lévő pontok felváltva kilépési és belépési pontok.



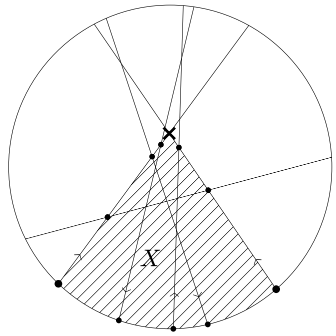
1. ábra

a) Válasszunk ki egy végpontot, és legyen belépési pont. A többi végpont felváltva legyen kilépési és belépési pont. Egy tetszőleges szakaszt az összes többi metsz, ezért a két oldalán ugyanannyi végpont van. Összesen $2n$ végpont van, ezért egy oldalon $n-1$ db van. Ez páros, ezért a szakasz végpontjai különböző típusúak (*2. ábra*).



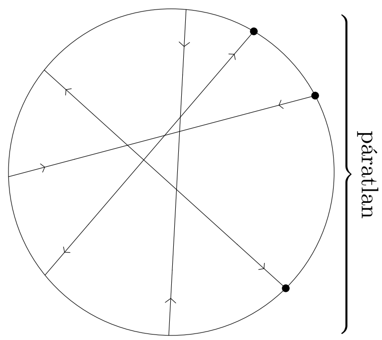
2. ábra

Tegyük fel, hogy van két béka, ami összeütközik. Legyen a *3. ábrán* látható, a két szakasz metszéspontig tartó részei és a két belépési pontot összekötő, a két szakasz kilépési pontját nem tartalmazó körív által határolt alakzat X. Az X konvex, ezért minden szakasz 0 vagy 2 pontban metszi az X határvonalát. A két béka ütközik, ezért a két szakasz határvonalán ugyanannyi metszéspont van. A köríven páratlan számú végpont van, mert két belépési pont között vannak. Így összesen páratlan számú pontban metszik a szakaszok az X határvonalát. Ez ellentmondás, tehát a békák nem ütköznek.



3. ábra

b) Tegyük fel, hogy lehetséges. Egy szakasz egyik oldalán $n-1$ végpont van. Ez páratlan, ezért a szakasz két végpontja ugyanolyan típusú. Ez ellentmondás (*4. ábra*).



4. ábra