i) Ha $x \geq 0$ és $y \geq 0$, akkor az első feltétel így írható fel: $y \leq -x + \sqrt{2}$, vagyis egy olyan egyenes „alatti" síkrészről van szó, amely egyenes mindkét koordinátatengelyt az origótól pozitív irányban $\sqrt{2}$ távolságra metszi (e metszéspontok távolsága pedig éppen 2 egység[1]). Összességében ekkor tehát egy egyenlő szárú derékszögű háromszög pontjai alkotják a megadott tartomány egy részét.

$x \leq 0$ és $y \geq 0$ esetén – az előzőekhez hasonlóan – adódik, hogy $y \leq x + \sqrt{2}$, amely egyenlőtlenségeknek ismét egy egyenlő szárú derékszögű háromszöghöz tartozó pontok felelnek meg (a háromszög az előző háromszög – y tengelyre vonatkozó – tükörképe[1]).

$x \geq 0$ és $y \leq 0$ esetén az eredeti egyenlőtlenség ekként alakítható át: $y \geq x - \sqrt{2}$. Egy újabb (egyenlő szárú derékszögű) háromszöget kaptunk, amely az első háromszög – x tengelyre vonatkozó – tükörképe.

Végezetül, $x \leq 0$ és $y \leq 0$ esetén az $y \geq -x - \sqrt{2}$ egyenlőtlenségre jutunk, ez a három egyenlőtlenség pedig egy olyan, a harmadik síknegyedben fekvő háromszög pontjait adja, amely a legelső háromszög – origóra vonatkozó – tükörképe.

Tekintve, hogy a fent említett négy háromszög egyesítése egy négyzetet ad[1], azt mondhatjuk, első egyenlőtlenségünk egy olyan *négyzetlapot* jellemez, amelynek a középpontja az origóban van, átlói a koordinátatengelyekre illeszkednek, oldala pedig 2 egység hosszú.

ii) Minthogy $64^{\frac{1}{2}} = \left(8^2\right)^{\frac{1}{2}} = 8$ és $32^{\frac{3}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{3}{5}} = 2^3 = 8$, ezért második egyenlőtlenségünk jobb oldalán $0 = \log_{\frac{1}{\sqrt{2016}}} 1$ áll. Mivel esetünkben a logaritmus alapja 1-nél kisebb[1], ezért szigorúan monoton csökkenő függvényről van szó, azaz az argumentumokra $x^2 + y^2 \leq 1$, továbbá nem lehetséges, hogy x és y értéke egyszerre legyen 0. A második egyenlőtlenség tehát egy origó középpontú, egységnyi sugarú ***körlapot*** határoz meg, annak középpontja nélkül.

iii) Azt állítjuk, hogy az *ii)* pontban említett körlap teljes egészében része az *i)* pontban említett négyzetlapnak, pontosabban igazoljuk, hogy valójában a négyzet beírt köre. Tekintve, hogy az egységnyi sugarú kör középpontja a 2 egység oldalhosszúságú négyzet középpontjában van, állításunk „triviális".

iv) Annak a valószínűsége, hogy egy, a négyzetlapról választott pont egyúttal a körlaphoz is hozzátartozik, a megfelelő alakzatok területének arányával adható meg, azaz azt kell megvizsgálnunk, a kör területe hányad része a négyzet területének:

$$A = \frac{t_{\text{kör}}}{t_{\text{négyzet}}} = \frac{1^2 \cdot \pi}{2^2} = \frac{\pi}{4}.$$

v) $\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0 \Leftrightarrow (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha - \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha$. Tekintettel arra, hogy a hegyesszögek esetében (és ilyen megoldást keresünk), a szinusz-függvény szigorúan monoton növekszik, a koszinusz-függvény pedig szigorúan monoton csökken, legfeljebb egy olyan változóérték lehet[1], amelyre mindkét függvény azonos értéket vesz fel. Ilyen érték valóban létezik, nevezetesen a $\frac{\pi}{4}$, hiszen $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tehát $B = \frac{\pi}{4}$.

vi) Tekintve, hogy $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$, $4\sqrt{5} = \sqrt{80}$ és $3\sqrt{10} = \sqrt{90}$, a háromszög oldalait nagyság szerint növekvő sorrendben soroltuk fel. Írjuk fel tehát a legkisebb oldalra a koszinusz-tételt, a háromszög legkisebb szöge ugyanis éppen azzal szemben van:

$$\sqrt{50}^2 = \sqrt{80}^2 + \sqrt{90}^2 - 2 \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{90} \cdot \cos\varphi, \quad \text{amiből} \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ez pedig azt jelenti, hogy $\varphi = 45^\circ$, vagyis $C = \frac{\pi}{4}$.

Tehát a három szám egyenlő.

[1] Miért is?
[1] Miért is?
[1] Miért is?
[1] Miért is?
[1] Miért is?