A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. $n=1$ esetben 0 a szükséges kérdések száma, hiszen egy tudós biztosan piripócsi.

Tegyük fel, hogy k tudós származását megtudhatjuk $k^2/2$ kérdéssel. Megmutatjuk, hogy ekkor $k+1$ tudóst megismerhetünk $(k+1)^2/2$ kérdéssel.

Válasszunk ki egy tudóst, T-t és kérdezzük meg a többieket, hogy T honnan jött. Mivel a tudósok többsége piripócsi, a többségben levő válaszok megadják, hogy T hova való. Ha egyik válasz sincs többségben, tehát $k/2$ tudós állítja, hogy T piripócsi és $k/2$, hogy nekeresdi, akkor a kérdezett tudósok fele hazudik, így T csak piripócsi lehet.

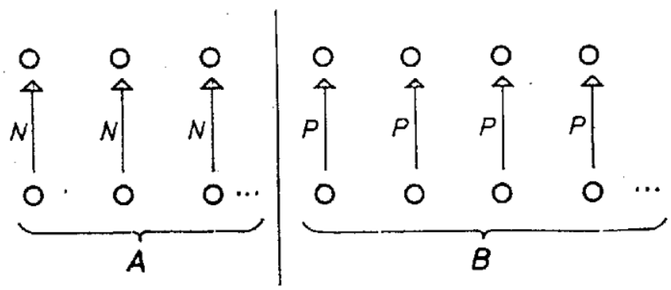
A továbbiakban két esetet vizsgálunk. Ha T piripócsi, tőle újabb $k-1$ kérdéssel megtudhatjuk a többi tudós származását, így $2k-1<(k+1)^2/2$ kérdés elég.

Ha T nekeresdi, őt kihagyjuk a társaságból. A piripócsiak többségben maradnak, így ezt a k tudósból álló társaságot az indukciós feltevés szerint megismerhetjük $k^2/2$ kérdéssel. Így összesen legfeljebb $\frac{k^2}{2}+k=\frac{(k+1)^2-1}{2}$ kérdést használtunk fel, tehát az állítás igaz.

Természetesen ezt a módszert tovább lehet finomítani, a kérdések száma csökkenthető, de hogy $10n$ kérdés is elég, azt egy másik algoritmus segítségével bizonyítjuk.

Az indukciós feltevésünk az, hogy ha egy $k<n$ tagú társaságban a nekeresdiek száma kevesebb a piripócsiakénál, akkor legfeljebb $2k$ kérdéssel el tudjuk dönteni, ki honnan jött. $n=1$ esetében ez nyilván igaz.

Bebizonyítjuk, hogy ha a társaság n tagú, $2n$ kérdés elég. Tegyük fel először, hogy n páros. Állítsuk párba a tudósokat az ábra szerint, és kérdezzük meg az alsókat, honnan származik a felső sorban álló párjuk. Ezután osszuk a tudósokat két csoportra: az A csoportba tartozzanak azok a párok, ahol a válasz: Nekeresd, a B csoportba pedig azok, ahol a válasz: Piripócs. Az A csoportban legyen $2a$, a B csoportban $2b$ tudós.



Az A-beli párokban legalább az egyik tudós nekeresdi, hiszen ha mindkettő piripócsi lenne, akkor bármelyikük a másikat piripócsinak mondaná. A-ban tehát a piripócsiak legfeljebb annyian vannak, mint a nekeresdiek, ezért a B csoport nem lehet üres és benne több piripócsinak kell lennie, mint nekeresdinek. Tovább menve azt is észrevehetjük, hogy ha B alsó sorában egy tudós piripócsi, akkor az ő felső párja is piripócsi, hiszen azt állítja róla. Ebből az következik, hogy B felső sorában álló b tudós közt több a piripócsi, mint a nekeresdi, így az indukciós feltevés szerint őket $2b$ kérdéssel megismerhetjük. Közülük egy piripócsitól már megtudhatjuk, hogy a többi $2a+b$ tudós honnan jött. A felhasznált kérdések számát megvizsgálva:

$$(a+b)+2b+(2a+b)=3a+4b\le 4a+4b=2n,\quad \text{hiszen most}\quad 2a+2b=n.$$

Ha n páratlan, akkor a párba állítás után marad egy tudós. Ha b páros, vegyük őt a B csoport felső sorához. Ha ott ugyanannyi piripócsi van, mint nekeresdi, akit kihagytunk, csak piripócsi lehet, tehát az új csoportban több a piripócsi, mint a nekeresdi. Ha pedig B felső sorában eleve több a piripócsi, mint a nekeresdi, akkor legalább 2-vel több, hiszen b páros, tehát bárhonnan jött is a kihagyott tudós, őt közéjük véve is megmarad a piripócsiak többsége. Ha azonban b páratlan, nem szabad a kihagyott tudóst a B felső sorában állók közé venni. Szerencsére nincs is erre szükség, hiszen most ott biztosan több piripócsi van, mint nekeresdi. Az eljárás és a bizonyítás mindkét esetben ugyanígy fejezhető be, mint páros n-re.

Szegedy Patrik (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Sokan estek abba a hibába, hogy a megoldás első felében használt gondolatmenet alapján nemleges választ adtak a feladat második kérdésére.

2. Nem ismert, hogy mennyi a legkevesebb kérdés, amennyivel még biztosan célhoz lehet érni. Nyilvánvalóan legalább $n/2$ kérdést fel kell tennünk (mindenkiről valamilyen információt kell szereznünk, és egy kérdéssel két tudósról tudunk meg valamit). *Ruzsa Imre* igazolta, hogy $5n/4$ kérdésre feltétlenül szükség van. Ismeretes olyan taktika, amely $3n/2$ kérdés után eldönti, hogy ki hová való.

3. Az a feltétel, hogy a piripócsiak többen legyenek, feltétlenül szükséges. Ha például m piripócsi és m nekeresdi volna a kongresszuson, továbbá a nekeresdiek egymást piripócsinak, a piripócsiakat nekeresdinek mondanák, nem lehetne eldönteni, hogy ki hová való.