I. rész

1. *Pisti, a focicsapat csapatkapitánya kíváncsi volt, hogy milyen erős a csapat, így készített egy statisztikát. Segítsünk Pistinek a statisztikai értékek kiszámításában.*

a) A csapattagok átlagosan egyenként egy meccsen 4 km *hosszúságú utat futnak. Az út egyik felét* 17 km/h*-val, míg az út másik felét* 14 km/h*-val futják. Mennyi a fiúk átlagsebessége?* *(6 pont)*

b) A kezdőcsapat összeállításánál nagyon fontos a megfelelő magasság is. Pisti 183*, Béla* 201*, Peti* 200*, Marci* 191 cm *magas. Andris és Bálint magassága azonban elveszett. Szerencsére Pisti már kiszámolta a kezdőcsapat magasságának a következő átlagait (két tizedesjegyre kerekítve): négyzetes átlag:* 188,16 cm*, számtani átlag:* 187,83 cm*. Segítsünk kiszámítani Andris és Bálint magasságát, ha tudjuk, hogy Bálint az alacsonyabb kettejük közül. A választ egész számra kerekítve adjuk meg.* *(6 pont)*

Megoldás. *a*) Az átlagsebességet az alábbi formulával számíthatjuk ki: $v_{\text{átlag}} = \dfrac{s_{\text{összes}}}{t_{\text{összes}}}$.

A feladat szövegéből tudjuk, hogy az összes út 4 km. Az összes idő pedig

$$\frac{2}{17} + \frac{2}{14} = \frac{31}{119} \approx 0{,}26 \text{ óra}.$$

Ezeket behelyettesítve a fenti képletbe:

$$v_{\text{átlag}} = \frac{4}{\frac{31}{119}} \approx 15{,}35\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

b) A feladat során két helyes képlet alkalmazására van szükség, a számtani átlag képletére:

$$\overline{Y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} Y_i}{N},$$

illetve a négyzetes átlag képletére:

$$\overline{Y} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} Y_i^2}{N}}.$$

A képletekbe való behelyettesítés után a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$188{,}16 = \sqrt{\frac{183^2 + 201^2 + 200^2 + 191^2 + x^2 + y^2}{6}},$$
$$187{,}83 = \frac{183 + 201 + 200 + 191 + x + y}{6}.$$

A feladatot levezetve $y_1 \approx 169{,}41$ cm, $y_2 \approx 182{,}57$ cm. Az ezekhez tartozó x számpárok ugyanezek felcserélve, betűszimmetria miatt, így az x értékek kiszámolása nem szükséges.

Kerekítés után: Bálint 169 cm, Andris pedig 183 cm magas. Ezekkel az értékekkel számolva a feladat szövegében szereplő átlagokat kapjuk.

2. *Néhányan dartsoznak. Adélnak, a „Sniper”-nek $\frac{45}{8}$-szor annyi pontja van, mint az* 5*. helyen álló Eleknek, illetve $\frac{5}{3}$-szor annyi pontja van, mint a* 2*. helyen álló Bélának. A* 2–5*. helyen álló emberek pontszámai egy mértani sorozatot alkotnak, továbbá pontszámaik összege* 390*. Harmadik helyen Csaba toporzékol, míg a* 4*. Dani. A bajnokság során csak egész pontszámuk lehet a versenyzőknek.*

a) Hány pontja van a játékosoknak külön-külön? *(9 pont)*

b) Tegyük fel, hogy a játék hátralévő részében még 5*-ször találják el a legértékesebb mezőt, a tripla* 20*-at, mely* 60 *pontot ér. Mekkora a valószínűsége, hogy a jelenleg* 40 *ponttal* 6*. helyen álló Feri csak ezekből a dobásokból meg tudja dönteni az eredeti* 279 *pontos rekordot, ha feltehetjük, hogy a tripla* 20*-ak az első hat helyen lévő emberek között születnek, akik ugyanakkora valószínűséggel dobnak tripla* 20*-at, és egy ember akár többet is dobhat?* *(4 pont)*

Megoldás. *a*) Első lépésként meghatározzuk a mértani sorozat kvóciensét. Ehhez a $\frac{45}{8}$-ot elosztjuk $\frac{5}{3}$-dal, így $\frac{135}{40}$-et kapunk. Ez q^3-nak felel meg, így a kvóciens $\frac{3}{2}$.

A mértani sorozat összegképlete $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, ahol a_1 a legkisebb pontszám, vagyis „Purman” pontszáma. Behelyettesítve

$$390 = a_1 \frac{1{,}5^4 - 1}{1{,}5 - 1}, \quad \text{amiből} \quad a_1 = 48.$$

Ebből ki lehet számolni a többi játékos pontszámát, melyek a következők: Eleké 48, Danié 72, Cecilé 108, Béláé 162 pont.

Adélnak pedig (Béla pontját $\frac{5}{3}$-dal beszorozva) 270 pontja van.

b) Ferinek minimum 4 tripla 20-at kell dobnia, hogy megdöntse a rekordot (hiszen ha 4-et dob, akkor pont 280 pontja lesz). Ha mindegyiket ő dobja, az csak egyféleképpen történhet meg, ha pedig 1-et más dob, az 25-féleképpen, hiszen megkülönböztetjük, hogy hányadikat dobja más.

Az összes eset meghatározásához az ismétléses variáció képletét használjuk: $V_6^{5,i} = 6^5 = 7\,776$.

Ebből adódóan a valószínűség: $p = \dfrac{1+25}{7\,776} \approx 0{,}003\,34$.

3. *Dávid úgy dönt, hogy szeretne 13 SG-s lány között 7 db ajándékot kisorsolni. Az ajándékok különböző értékűek. Az ajándékok közül 5 be van csomagolva, 2 pedig nincs.*

a) Hányféleképpen oszthatja szét Dávid az ajándékait, ha tudjuk, hogy egy lány többet is kaphat, és már kettő becsomagolt ajándék előre ki lett sorsolva, továbbá Fanni csak a nem becsomagolt ajándékok közül kaphat? (*7 pont*)

b) Dávid észrevette, hogy a megvásárolt ajándékok egy része selejtes, egy része pedig kopott. A bolt statisztikája szerint a raktárukon lévő 80 termék közül 13 darab volt selejtes, 7 darab kopott és a többi sértetlen. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Dávid 2 darab selejtes és 3 darab kopott ajándékot hozott el az SG-s lányoknak (a maradék 2 ajándék sértetlen)? (*6 pont*)

Megoldás. a) A feladat során nem kell a már előre kisorsolt ajándékokkal foglalkozni, így 3 becsomagolt és 2 nem becsomagolt maradt.

Mivel az ajándékok különböző értékűek és egy lány többet is kaphat, így az ismétléses variáció képletébe kell behelyettesítenünk.

Figyelni kell arra is, hogy a becsomagolt ajándékokat csak 12 lánynak oszthatjuk szét.

Innen: $V_{12}^{3,i} \cdot V_{13}^{2,i} = 12^3 \cdot 13^2 = 292\,032$ eset van.

b) Az összes eset meghatározása során ismétlés nélküli kombináció képletét kell alkalmazni. Ez alapján: $C_{80}^7 = \binom{80}{7}$.

Meg kell határozni azon esetek számát, amikor az adott halmazokból adott mennyiséget vesz ki, ennek módja: $\binom{13}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{60}{2}$.

A valószínűség kiszámításához a kedvező eseteket elosztjuk az összes esettel:

$$p = \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{60}{2}}{\binom{80}{7}} \approx 1{,}521 \cdot 10^{-3}.$$

4. *a) Határozzuk meg az* $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$ *halmazokat, ha az* A *halmaz a* $\log_{(x^2-1)}\left(\dfrac{-6}{x^2-9}\right)$ *függvény értelmezési tartománya, a* B *halmaz pedig a*

$$\sqrt{-2x^2+2x+60}$$

kifejezés értelmezési tartománya. (*9 pont*)

b) Az SG-s e-learning kurzuson 3 tantárgyból lehet választani. Matekot összesen 26, Törit 21, Közgázt 19 diák tanul. Tudjuk továbbá, hogy a Közgázt és Törit is tanulók kétszer annyian vannak, mint a Matekot és Közgázt is, illetve azt, hogy a Törit és Közgázt tanulók 4-gyel többen vannak, mint a Matekot és Törit is tanulók. 15 diák tanul egynél több tárgyat. Összesen 48 diák tanul az e-learningen. Hány diák tanul Matekot és Közgázt is? (*4 pont*)

Megoldás. a) Első lépésként meg kell határozni az A halmaz elemeit. Mivel logaritmusunk van, az alap 0-nál nagyobb és nem egyenlő 1-gyel: $x^2-1>0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1[\cup]1;\infty[$ és $x^2-1 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$.

Kikötést kell tenni a logaritmus numeruszára is. Mivel a számláló negatív, csak a nevezőre kell kikötést tenni: $x^2-9<0 \Leftrightarrow]-3;3[$.

Az előbb felsorolt három halmaz közös része az A halmaz: $\big(]-3;-1[\backslash\{-\sqrt{2}\}\big) \cup \big(]1;3[\backslash\{\sqrt{2}\}\big)$.

Meg kell határozni még a B halmazt: $-2x^2+2x+60 \geq 0 \Leftrightarrow -2(x^2-x-30) \geq 0 \Leftrightarrow -2(x-6)(x+5) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5;6]$. Innen:

$$A \cap B = A = \big(]-3;-1[\backslash\{-\sqrt{2}\}\big) \cup \big(]1;3[\backslash\{\sqrt{2}\}\big), \quad A \cup B = B = [-5;6], \quad A\backslash B = \{\emptyset\}.$$

b) $|M| = 26$, $|T| = 21$, $|K| = 19$. Vezessük be az alábbi jelöléseket: $|M \cap K| = x$, $|M \cap K \cap T| = y$. Ennek segítségével: $|K \cap T| = 2x$, $|M \cap T| = 2x-4$.

Ez alapján felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$26+21+19-x-2x-(2x-4)+y = 48,$$
$$(x-y)+(2x-y)+(2x-4-y)+y = 15.$$

Az egyenleteket megoldva kapjuk, hogy $y=3$, $x=5$.

Tehát 5 diák tanul Matekot és Közgázt is.

II. rész

5. *Adott egy kör, melynek középpontja $O(8;5)$, sugara 4 egység. Adott továbbá a $h\colon y=-x+9$ egyenes és a $P(0;1)$ pont.*

a) Adjuk meg azon egyenesek metszéspontjait a körrel, amik áthaladnak a P ponton, valamint a h egyenes és a kör egyik metszéspontján. (*10 pont*)

b) Adjuk meg az új egyenesek körhöz viszonyított helyzetét/helyzeteit. (*2 pont*)

c) Adjuk meg a h és a $g\colon y=5$ egyenesek hajlásszögét. (*4 pont*)

I. megoldás. *a*) Felírjuk a kör egyenletét: $k\colon (x-8)^2+(y-5)^2=16$.

Egyenletrendszerben megoldva megkeressük k metszéspontjait a h egyenessel. Ezek a következők lesznek: $Q(4;5)$, $Z(8;1)$.

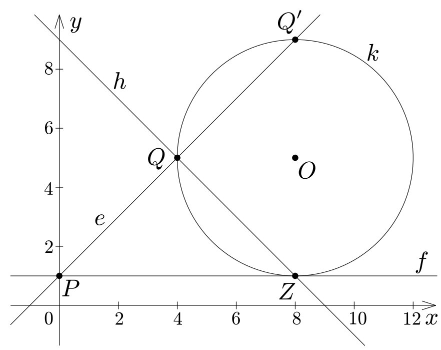
Két pont alapján felírjuk a keresett egyenesek egyenletét:

$$e\colon (4-0)\cdot(y-1)=(5-1)\cdot(x-0),$$

azaz $y=x+1$,

$$f\colon (8-0)\cdot(y-1)=(1-1)\cdot(x-0),$$

azaz $y=1$.



A kör és az egyes egyenesek egyenleteit egyenletrendszerben megoldjuk. Ebből megkapjuk, hogy az e egyenes és a k kör metszéspontjai: $Q(4;5)$, $Q'(8;9)$, továbbá az f egyenes és a k kör érintési pontja: $Z(8;1)$.

b) Az e egyenes szelője, az f egyenes pedig érintője a k körnek.

c) A két egyenes irányvektora: $v_g(1;0)$, illetve $v_h(1;-1)$.

Két vektor skaláris szorzatának átalakított képletével a következőt kapjuk:

$$\cos\alpha=\frac{1\cdot 1+0\cdot(-1)}{\sqrt{0^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

amiből $\alpha=45^\circ$.

II. megoldás. Vegyük észre, hogy g párhuzamos az x tengellyel. Ezért a két egyenes hajlásszögét megkapjuk, ha felírjuk az $m=\operatorname{tg}\alpha$ összefüggést. Behelyettesítve: $-1=\operatorname{tg}\alpha$, amiből $\alpha=135^\circ$.

Mivel két egyenes hajlásszögén mindig az általuk meghatározott 2 szög közül a kisebbet értjük, így a hajlásszög értéke $180^\circ-135^\circ=45^\circ$.

6. *a*) *Összeszorozzuk az első 100 pozitív egész számot. Hány 0 áll az így képzett szám végén?* (*10 pont*)

b) *Határozzuk meg azt a négyjegyű számot, amely eleget tesz a következő állításnak: $\overline{abcd}+\overline{abc}-\overline{ab}+\overline{a}=2925$.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Egy szám végén annyi nulla áll, ahányadik hatványával a 10-nek osztható a szám. A tíz prímtényezős felbontása: $2\cdot 5=10$. Ebből az következik, hogy ahány számpárost tudunk összeállítani 2-esekből és 5-ösökből, annyi 0 lesz a számunk végén.

1–100-ig a 2-vel és annak hatványaival osztható számokból több van, mint az 5-tel és annak hatványaiból oszthatóakból, ezért minden 5-öshöz fogunk találni 2-es szorzópárt, így elég az 5-ösök darabszámát megállapítani.

Nézzük meg, hogy hány számban szerepel az 5 első hatványa. $100:5=20$, tehát 20 db 5-öst kapunk. Az 5 második hatványa: $100:25=4$. Minden szám 2-vel növelné az 5-ösök mennyiségét, de ezeket egyszer már számoltuk, így csak 4-gyel növekszik a darabszám. Mivel $5^3>100$, ezért több lehetőség nincs. Ez összesen tehát $20+4=24$ db 5-ös.

Tehát a szám végén pontosan 24 nulla áll.

b) Át kell alakítani az egyenletet: $1091a + 109b + 11c + d = 2925$. Kikötést kell tenni: $1 \le a \le 9$, $0 \le b, c, d \le 9$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

$a = 2$, hiszen máshogy az egyenlet nem teljesülhet.

$$2182 + 109b + 11c + d = 2925 \iff 109b + 11c + d = 743.$$

$b = 6$, hiszen máshogy az egyenlet nem teljesülhet.

$$654 + 11c + d = 743 \iff 11c + d = 89.$$

$c = 8$, hiszen máshogy az egyenlet nem teljesülhet.

$$11c + d = 89 \iff 88 + d = 89.$$

Tehát $d = 1$. Innen a szám: $\overline{abcd} = 2681$.

7. *a*) *Egy trapézt, melynek alapjai* 2 *és* 8 cm, *szárai pedig* 3 *és* 4 cm *hosszúak, a rövidebbik alapjánál fogva megforgatunk.*

b) *Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?* (*10 pont*)

c) *Mekkora a térfogata annak a legkisebb gömbnek, amibe beleférne ez a test?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Észre kell venni, hogy a feladat esetében egy hengerről és két kúpról van szó. Ki kell számolni a trapéz magasságát, amit egy kétismeretlenes egyenlet segítségével tudunk megtenni, ha kivágjuk a trapéz téglalap részét középről.

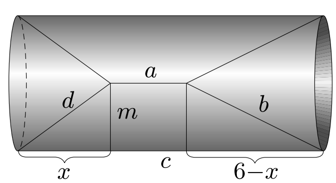
$$\left.\begin{aligned} m^2 + x^2 = 3^2, \\ m^2 + (6-x)^2 = 4^2 \end{aligned}\right\} \implies x = \frac{29}{12}, \quad m = \frac{\sqrt{455}}{12}.$$

Ezután a henger és a kúp térfogatának kiszámítása következik. Legyen c a trapéz hosszabbik alapja, $c = 2$ cm, m a trapéz magassága és x az egyik szár hosszabbik alapra eső vetülete.

$$\begin{aligned} V_{\text{test}} &= V_{\text{henger}} - V_{1.\text{kúp}} - V_{2.\text{kúp}} = \\ &= m^2\pi \cdot c - \frac{m^2 x\pi}{3} - \frac{m^2(6-x)\pi}{3} \approx \frac{455}{18}\pi - 2{,}55\pi - 3{,}77\pi \approx 18{,}96\pi \approx 59{,}56 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Felszínszámításnál a henger, illetve a kúpok palástjára lesz szükség:

$$\begin{aligned} A_{\text{test}} &= A_{\text{palást(henger)}} + A_{\text{palást(1.kúp)}} + A_{\text{palást(2.kúp)}} = \\ &= 2m\pi \cdot c + 4m\pi + 3m\pi \approx 28{,}44\pi + 7{,}11\pi + 5{,}33\pi = 40{,}88\pi \approx 128{,}44 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$



b) Ahhoz, hogy meghatározzuk a köré írható gömb sugarát, a síkmetszetet kell megvizsgálni. Egy olyan téglalap átlóját nézzük, melynek egyik oldala 8 cm, a másik pedig $2m$, azaz $\dfrac{\sqrt{455}}{6}$.

Innen az átló hossza Pitagorasz-tétellel kiszámítva (két tizedesjegyre kerekítve): 8,75 cm. Ebből a sugár: $r \approx 4{,}38$ cm. A gömb térfogatát pedig a következő képlettel határozzuk meg:

$$V_{\text{gömb}} = \frac{4 \cdot r^3\pi}{3} \approx 351{,}98 \text{ cm}^3.$$

8. *a*) *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:*

$$\begin{aligned} 9^x \cdot 343^y &= 49^x \cdot 27^y, \\ \cos\left(2x + \frac{9}{2}y\right) + \cos\left(\frac{11}{3}x + 2y\right) &= -\sqrt{3}. \end{aligned}$$ (*16 pont*)

Megoldás. A két egyenletet megfigyelve rá lehet jönni, hogy érdemes az elsővel kezdeni. Ezt átalakítva a következőt kapjuk:

$$\frac{7^{3y}}{3^{3y}} = \frac{7^{2x}}{3^{2x}} \iff \left(\frac{7}{3}\right)^{3y} = \left(\frac{7}{3}\right)^{2x}.$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $3y = 2x \Leftrightarrow y = \frac{2x}{3}$. Ezt már be tudjuk helyettesíteni a második egyenletbe. Az egyenletet átalakítva kapjuk, hogy $\cos(5x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Az egyenletet megoldva megkapjuk a következő értékeket: $x_1 = \frac{1}{6}\pi + \frac{2k\pi}{5}$, $x_2 = -\frac{1}{6}\pi + \frac{2l\pi}{5}$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Visszahelyettesítve: $y_1 = \frac{1}{9}\pi + \frac{4k\pi}{15}$, $y_2 = -\frac{1}{9}\pi + \frac{4l\pi}{15}$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

9. *a) Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő elemei. A háromszög kerülete* 36 cm. *Milyen hosszúak a háromszög oldalai?* (*5 pont*)

b) Hány megoldása van az $|x^2 - 4x - 5| = p$ *egyenletnek a* p *paraméter függvényében?* (*11 pont*)

Megoldás. *a*) A feladat megoldásához egy kétismeretlenes egyenletrendszert kell felírnunk. Az első a kerület meghatározásából következik, a második pedig a Pitagorasz-tétel felírása.

$$(a_2 - d) + a_2 + (a_2 + d) = 36,$$
$$(a_2 - d)^2 + a_2^2 = (a_2 + d)^2.$$

Az első egyenletet rendezve: $a_2 = 12$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe: $d = 3$.

A háromszög oldalai 9, 12, 15 cm hosszúak.

b) Először számoljuk ki a másodfokú kifejezés zérushelyeit: $x_1 = -1$; $x_2 = 5$.

Így a kifejezés lokális szélsőértéke az $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2$ helyen van. Értéke: $y = -9$.

Így már fel tudjuk rajzolni a függvény grafikonját (az abszolút érték miatt azokat a pontokat, amelyek második koordinátája negatív, tükrözzük az x tengelyre):

A p értékétől függően annyi megoldása lesz az egyenletnek, ahány metszéspont keletkezik a függvény grafikonjának és egy, az x tengellyel párhuzamos egyenesnek.

Ha $p < 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $p = 0$, akkor 2 megoldás van.

Ha $0 < p < 9$, akkor 4 megoldás van.

Ha $p = 9$, akkor 3 megoldás van.

Ha $p > 9$, akkor ismét 2 megoldás van.