I. rész

1. 2015-ben az Energetikai Szakközépiskola és Kollégium (ESZI) végzős, 12. osztályos százhuszonöt diákja közül néhányan emelt szintű érettségit tettek matematikából, átlaguk pontosan 3,8 volt. A többi diák középszinten érettségizett, az ő érettségi átlaguk pedig pontosan 3,55 volt. A diákok közül mindenki sikeres vizsgát tett, az összesített iskolai matematika érettségi átlag pontosan 3,56 lett.

a) Hányan érettségiztek emelt szinten?

b) Az emelt szinten érettségizők osztályzatainak mediánja: 4, mennyi lehet az osztályzatok módusza?

c) Öt 13. évfolyamos ESZI-s diák írt szintemelő érettségi dolgozatot matematikából, az ő átlaguk is 3,80 volt, és itt sem bukott meg senki. Tudjuk, hogy az osztályzataik módusza és mediánja is 5. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dolgozatok közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva közülük mindkettő jeles? (*12 pont*)

2. Egy számtani és egy mértani sorozat első tagja egyaránt 2. A sorozatok második tagjai szintén egyenlők, valamint a mértani sorozat hányadosa egyenlő a számtani sorozat differenciájával.

a) A mértani sorozat 10. tagja a számtani sorozat hányadik tagjával egyenlő?

b) Mutassuk meg, hogy a mértani sorozat bármely tagja eleme a számtani sorozatnak.

c) Mutassuk meg, hogy a mértani sorozat egyik tagja sem állítható elő a számtani sorozat néhány egymás utáni tagjának összegeként. (*13 pont*)

3. Legyen az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény hozzárendelési szabálya

$$f(x) = 4^x + 0{,}5^{2x} - 3.$$

a) Adjuk meg az f függvény értékkészletét és zérushelyeinek pontos értékét.

b) Mutassuk meg, hogy a függvény páros és szigorúan monoton növekvő a pozitív számok halmazán. (*13 pont*)

4. *a*) Mekkora lehet a p valós paraméter értéke, ha tudjuk, hogy a $\cos x - \sin x = p$ egyenletnek van megoldása?

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{2\cos x + 4\sin x}{\cos x + \sin x} = 2\operatorname{tg} x + 1.$$

(*13 pont*)

II. rész

5. Anna és Balázs szeretnek sakkozni, ezért 100 játszmás páros mérkőzéseket szoktak játszani. Egy játszmának háromféle kimenetele lehet: $A = \{\text{Anna nyer}\}$, $B = \{\text{Balázs nyer}\}$, $C = \{\text{A játszma döntetlenül végződik}\}$. Tegyük fel, hogy az A és a B események valószínűsége a páros mérkőzések során: $P(A) = \dfrac{3}{5}p$, $P(B) = \left(p + \dfrac{1}{5}\right)^2$, ahol p valós paraméter.

Anna és Balázs azt tervezik, hogy a következő hétvégén 100 játszmás páros mérkőzést játszanak. Egy játszmában a győzelemért egy pont, a döntetlenért fél pont jár, a vereségért a játékos nem kap pontot.

a) Mekkora lehet a p paraméter értéke?

b) A p paraméter értékétől függően legalább, illetve legfeljebb mekkora lehet a tervezett páros mérkőzés során a két játékos megszerezhető pontjainak várható értéke közötti különbség? (*16 pont*)

6. *a*) Az ABC szabályos háromszög oldalhossza 2 cm. Az AC és a BC oldal felezőpontjaira illeszkedő egyenes a háromszög köré írt körét a D, illetve az E pontokban metszi. Legyen a D a BC oldal F_a felezőpontjához közelebbi metszéspont. Határozzuk meg az F_aD távolságot.

b) Egy szabályos háromszög magassága 10 cm hosszú. Az egyik oldallal párhuzamos egyenes a háromszöget két olyan részre vágja, melyeknek a kerülete egyenlő.

i) Mekkora az egyenes távolsága a vele párhuzamos oldaltól?

ii) A háromszöget a magassága mentén megforgatjuk. Mekkora a keletkezett két test térfogata? (*16 pont*)

7. A haditengerészet tengeralattjáróinak védelme elsőrendű fontosságú feladat, mert a víz alatt számtalan veszély leselkedik ezekre a mélytengeri hajókra. A védettségüket a mozgékonyságukkal lehet leginkább fokozni, ezért kifejlesztettek egy olyan újfajta meghajtást, amely a tengeralattjáró sebességét a lebegésből (álló helyzetből) a $v(t) = -t^2 + 8t$ sebességfüggvény szerint változtatja a $0 \le t \le 4$ másodpercekben. Itt a pillanatnyi sebességet a képlet szerint $\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$-ban kapjuk. Ezután a sebesség másodpercenként $0{,}5\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$-mal egyenletesen csökken.

Egy tengeralattjárót jól védettnek neveznek, ha lebegésből 15 másodperc alatt a hosszánál nagyobb mértékben képes elmozdulni. Tudjuk, hogy az elmozdulásfüggvény $s(t)$ deriváltja a $v(t)$ sebességfüggvény.

a) Jól védett kategóriába tartozik-e a 170 m hosszú tengeralattjáró?

b) Tekintsük az $f(x)=-(x-3)^2+9$ függvény görbéjét a $[0;6]$ intervallumon. Legyen a görbe egy pontja $P(a;y)$. Tudjuk, hogy a P pontra illeszkedő $y=mx$ egyenletű egyenes felezi az $f(x)$ függvény görbéje, az $x=a$ egyenletű egyenes és az x tengely által meghatározott zárt síkidom területét. Adjuk meg m értékét és az egyenes egyenletét. (*16 pont*)

8. *a*) A $4n^4+1$ kifejezés milyen n természetes szám esetén lesz pozitív prímszám?

b) Oldjuk meg a természetes számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$2a^2b^3+10b^3=15a^2+224.$$ (*16 pont*)

9. Adott a koordináta-rendszerben az $x^2+y^2-4x-4y+4=0$ egyenletű kör.

a) A zárt körlap a koordináta-rendszer hány darab rácspontját fogja lefedni?

b) Húzzunk a körhöz érintőket az első síknegyedben. Ezen érintők közül melyik az, amely a koordináta-tengelyekkel a legkisebb területű háromszöget határozza meg? Írjuk fel az érintő egyenes egyenletét. (*16 pont*)