Bizonyítsuk be, hogy az első 1024 pozitív egész számot szét lehet osztani két, egyenként 512 elemet tartalmazó ($x_1, x_2, \ldots, x_{512}$) *és* ($y_1, y_2, \ldots, y_{512}$) *részre úgy, hogy minden* $j < 10$ *természetes számra fennálljon a következő egyenlőség:*

$$x_1^j + x_2^j + \ldots + x_{512}^j = y_1^j + y_2^j + \ldots + y_{512}^j. \tag{1}$$

I. megoldás. Kényelmesebb lesz az első 1024 nem negatív egész számra bizonyítani a feladat állítását. Ebből következni fog az eredeti állítás, hiszen ha valamilyen ($x_i,\ y_i,\ i = 1, 2, \ldots, 512$) számokra minden $j < 10$ mellett fennáll (1), akkor az

$$\overline{x}_i = x_i + 1, \qquad \overline{y}_i = y_i + 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, 512 \tag{2}$$

számokra is érvényes (1) minden $j < 10$ mellett. Az $\overline{x}_i^j$, $\overline{y}_i^j$ hatványok közül ugyanis az első például a j tényezős

$$(x_i + 1)(x_i + 1)\ldots(x_i + 1)$$

szorzattal egyenlő. Ha ebben minden tagot minden taggal megszorzunk, összesen 2^j szorzatot kapunk, hiszen mindegyik tényezőben két tag között választhatunk: vagy az x_i-t választjuk, vagy az 1-et. A kapott szorzatok mindegyike x_i^k alakú, ahol k azoknak a tényezőknek a száma, amelyekben az x_i-t választottuk. Így tehát $k \leqq j < 10$, és emiatt a kapott szorzatok mindegyikére külön-külön alkalmazva (1)-et, j helyett a k kitevőre azt kapjuk, hogy (1) az x_i-k, y_i-k helyett az $\overline{x}_i$, $\overline{y}_i$ számokra is teljesül.

Írjuk fel az első 1024 nem negatív egészet a kettes alapú számrendszerben, és aszerint osszuk őket két részre, hogy ebben az alakjukban a számjegyek összege páros-e vagy páratlan. Mivel 1024 a 2-nek éppen 10-edik hatványa, a számaink mind

$$2^9 e_9 + 2^8 e_8 + \ldots + e_0 \tag{3}$$

alakúak, ahol az e_k számjegyek mindegyike 0 vagy 1. Megfordítva, minden ilyen alakú szám megtalálható a két rész valamelyikében aszerint, hogy az

$$e_9 + e_8 + \ldots + e_0$$

összeg páros-e vagy sem.

Ha egy (3) alakú számnak ki akarjuk számolni a j-edik hatványát, most j tényezős szorzatot kell kiszámítanunk, de a

$$(2^9 e_9 + 2^8 e_8 + \ldots + e_0) \cdot (2^9 e_9 + 2^8 e_8 + \ldots + e_0) \ldots (2^9 e_9 + 2^8 e_8 + \ldots + e_0) \tag{4}$$

szorzatban a kifejtés után már 10^j részeredmény van, hiszen most mindegyik tényezőben 10 lehetőség közül választhatunk. Mindegyik részeredményben a 10 számjegy közül néhány szerepel, mégpedig $j < 10$ miatt biztosan 10-nél kevesebb. Minden konkrét számra egy adott típusú részeredmény akkor és csakis akkor lesz 0-tól különböző, ha az érintett számjegyek egyike sem 0. Mivel pedig a nem érintett számjegyek ezekkel együtt pontosan ugyanannyiszor adnak páros összeget, mint páratlant, pontosan ugyanannyiszor kapunk mindkét részben 0-tól különböző részeredményt. Végül amiatt, hogy ezek értéke független a számjegyek összegének paritásától, a mondott felosztásra (1) valóban teljesül.

II. megoldás. Legyen n tetszőleges pozitív egész, és legyen $m = 2^n$. Az n számra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy a következő állítás n-nek minden szóba jövő értékére teljesül:

Az első $2^{n+1} (= 2m)$ *pozitív egész számot szét lehet osztani két, egyenként* m *elemet tartalmazó* $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *és* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *csoportba úgy, hogy minden, legfeljebb* n*-edfokú* $p(x)$ *polinomra fennálljon a*

$$p(x_1) + p(x_2) + \ldots + p(x_m) = p(y_1) + p(y_2) + \ldots + p(y_m)$$

egyenlőség.

Ha ezt az állítást bizonyítottuk, ebből a feladat állítása már azonnal következik. Válasszuk ugyanis n-et kilencnek, a $p(x)$ polinom helyére pedig tegyük az $1, x, x^2, \ldots, x^9$ polinomokat ; az így kapott egyenlőségek adják a feladat állítását.

Most rátérünk az általunk kimondott tétel bizonyítására. Elsőként az $n = 1$ esettel foglalkozunk. Állítjuk, hogy az $1, 2, 3, 4$ számoknak az $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$ felosztása megfelel. Valóban, minden, legfeljebb elsőfokú polinom $p(x) = ax + b$ alakú (ahol $a = 0$ is lehetséges), és ekkor

$$p(1) + p(4) = 5a + 2b = p(2) + p(3)$$

ahogyan kívántuk.

Másodszor tegyük fel, hogy $n \geqq 1$-re az $1, 2, \ldots, 2m$ számoknak az $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ és $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ felosztása megfelelő. Osszuk fel az első $4m$ pozitív egész számot a következő módon :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m,\ y_1 + 2m,\ y_2 + 2m, \ldots, y_m + 2m),$$

illetve

$$(y_1, y_2, \ldots, y_m,\ x_1 + 2m,\ x_2 + 2m, \ldots, x_m + 2m),$$

Állítjuk, hogy ez a felosztás jó lesz $(n+1)$-re. Legyen $p(x)$ egy tetszőleges, legfeljebb $(n+1)$-edfokú polinom. A $q(x) = p(x+2m) - p(x)$ polinom legfeljebb n-edfokú, hiszen a jobb oldalon a legmagasabb fokú tag együtthatója 0. Így alkalmazhatjuk indukciós feltevésünket a $q(x)$ polinomra, tehát a következő egyenlőség fennáll:

$$q(x_1) + q(x_2) + \ldots + q(x_m) = q(y_1) + q(y_2) + \ldots + q(y_m).$$

Ebből $q(x_i) = p(x_i + 2m) - p(x_i)$ és $q(y_i) = p(y_i + 2m) - p(y_i)$ alapján átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p(x_1) + \ldots + p(x_m) + p(y_1 + 2m) + \ldots + p(y_m + 2m) = \\ = p(y_1) + \ldots + p(y_m) + p(x_1 + 2m) + \ldots + p(x_m + 2m). \end{aligned}$$

Mivel p tetszőleges, legfeljebb $(n+1)$-edfokú polinom volt, ez éppen tételünk érvényességét bizonyítja $(n+1)$-re.

A teljes indukció elve alapján tehát a tétel minden n-re érvényes, ezzel a bizonyítást befejeztük.