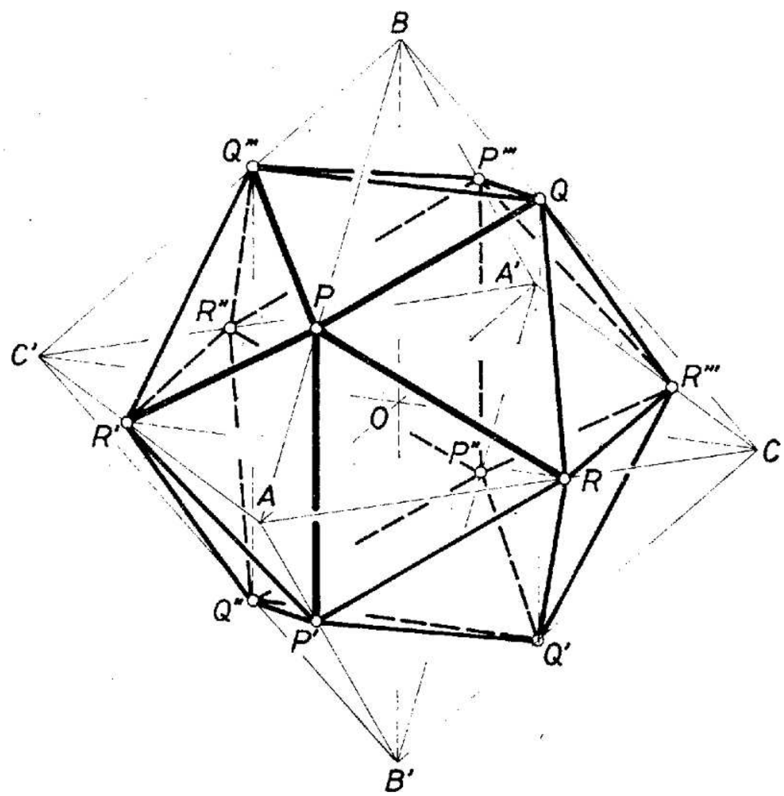
Jelöljük a szabályos oktaéder középpontját O-val, egy lapjának csúcsait $A,\ B,\ C$ betűvel, így a hátra levő 3 csúcs az utóbbiaknak O-ra való $A',\ B',\ C'$ tükörképe. Legyen P az AB él kijelölt pontja úgy, hogy $PA : PB = 1 : \left(\sqrt{5}+1\right)/2$ – röviden $1 : k$, vagyis $k > 1$ –, tehát PA az él kisebbik része, PB a nagyobbik rész.

Alkalmazzuk a váltakozás követelményét egyelőre A-ban és B-ben a C felé irányuló élek R, ill. Q osztópontjára, ez a két él C-ből nézve szomszédos. És mivel A és B miatt QB-t kisebbnek, RA-t a nagyobb résznek kell választanunk, ami által CQ a nagyobb rész lesz, CP pedig a kisebb, és ezek különbözők, nem jutottunk ellentmondásba a kiválasztás elvével.



Áttérve a szomszédos ACB' lapra, az AB' élen az A-hoz közelebbi P' osztópont kijelölése esedékes, az pedig éppen P tükörképe az oktaéder $OAC = S_b$ szimmetriasíkjára, ahogyan az ACB' lap ugyanilyen képe az ACB lapnak. Hasonlóan a CB' élen C körüljárása szerint kijelölendő Q' pontra $Q'C > Q'B'$, tehát Q' a Q képe S_b-re. Így A és C körüljárásában immár 3–3 élen teljesítettük a váltakozást.

Az AC' élen az A-tól távolabbi R' pontot választva, A körüljárása az előírás szerint záródik, hiszen A-ban 4 lap, 4 él fut össze, és a 4 páros szám. R' az R képe az $OAB = S_c$ síkra. Hasonlóan a $B,\ C,\ B',\ C'$ csúcsokban 3–3 egymás utáni élre lesz helyes a körüljárás, ha $C'B'$-n és $C'B$-n a Q'-nek, ill. Q-nak S_c-re való $Q'',\ Q'''$ képét választjuk. Végül az A körüli $P,\ R,\ P',\ R'$ pontnégyesnek az $OBC = S_a$ síkra való tükörképét véve, minden csúcs körül megfelel a kiválasztás, és ezzel beláttuk az a) állítás helyességét. – Bizonyításunk egyrészt az oktaéder egyes szimmetriáin alapult, másrészt azon a tényen, hogy az oktaédercsúcsokból kifutó élek 4-es létszáma osztható a kiválasztási elvben előírt ismétlődés 2-es periódusával.

2. Az oktaéder további szimmetriái alapján adódik, hogy a kiválasztott 12 pont bármelyike átvihető bármelyik másikba úgy, hogy egyidejűen minden egyes kijelölt pont kijelölt pontba jusson. Valóban: bármelyik oktaédercsúcs átvihető bármelyik másikba (a mondott további követelménnyel, többféleképpen is), és ha egyidejűen pontegyüttesünk nem önmagába ment át, akkor egy 90°-os elfordítás eredményezi ezt. – Eszerint pontjaink egy O körüli gömbön vannak rajta.

Megmutatjuk, hogy P-től 5 másik kiválasztott pont van egyenlő távolságra, ahogy a szabályos ikozaéder minden csúcsával 5 másik csúcs szomszédos, és együtt 5 szabályos háromszöget alkotnak. A PQR háromszög nyilvánvalóan szabályos, és hosszegységnek választva AP-t, oldalára a cosinustétel szerint

$$PQ = \sqrt{l + k^2 - k} = \sqrt{2} = PR.$$

Ugyanekkora az ABC' háromszögből PQ''' és PR' is, továbbá PP' is, hiszen az $ABA'B'$ metszet négyzet, és így APP' egyenlő szárú derékszögű háromszög, egységnyi befogókkal.

Ezek szerint $P',\ R,\ Q,\ Q'''$ és R' egy a P körüli gömbön is rajta vannak. Két (nem koncentrikus) gömb közös pontjai – ha vannak – egy körön vannak, vagyis egy síkban, eszerint $P'RQQ'''R'$ síkbeli ötszög. Másrészt oldalai is egyenlőek a fentiek szerint, tehát PO mint tengely körüli 72°-os elfordításokkal az ötszög csúcsai ciklikusan egymásba mennek át.

Ugyanez a pontegyüttes bármelyik pontjára is érvényes. Jelöljük a háromszöglapok számát h-val, és építsük össze a test modelljét csupa különálló szabályos háromszögből. A h db lapon eredetileg $3h$ csúcs van, az 5-ösével való összeragasztás után $3h/5$, és ez egyenlő 12-vel, kijelölt pontjaink létszámával; innen $h = 20$, tehát a test valóban szabályos ikozaéder. – A meghatározást úgy értettük, hogy a 12 pont együttesének konvex burka az ikozaéder.