I. rész

1. *a) Bizonyítsuk be, hogy az alábbi kifejezés értéke x-től független:*

$$\sin^2 x\big(\sin^4 x+\sin^2 x+2\big)+\cos^2 x\big(\cos^4 x+\cos^2 x+2\big)+$$
$$+\frac{\sin^2 2x}{4}\cdot\big(3\sin^2 x+3\cos^2 x+2\big).$$

b) Számológép nélkül adjuk meg a következő kifejezés pontos értékét:

$$(1+\operatorname{tg}137°)(1+\operatorname{tg}136°)(1+\operatorname{tg}135°)(1+\operatorname{tg}134°).$$ *(12 pont)*

Megoldás. *a)* A zárójeleket felbontva, majd a kifejezést alakítva:

$$\sin^6 x+\sin^4 x+2\sin^2 x+\cos^6 x+\cos^4 x+2\cos^2 x+$$
$$+3\sin^4 x\cos^2 x+3\sin^2 x\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x=$$
$$=\big(\sin^2 x+\cos^2 x\big)^3+\big(\sin^2 x+\cos^2 x\big)^2+2\big(\sin^2 x+\cos^2 x\big)=1+1+2=4.$$

Az eredeti kifejezés értéke független x-től.

b) A harmadik tényező nulla, így a szorzat értéke nulla.

2. *Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán:*

$$3\cdot\log_8(x-2)+2\cdot\log_4(2x)-5^{1-2\sin x}\cdot\log_2\big(2x^2-4x\big)=0.$$ *(13 pont)*

Megoldás. Az egyenletnek akkor van értelme (a logaritmus miatt), ha $x>2$. Átírjuk 2-es logaritmusra az egyenletet:

$$\frac{3\log_2(x-2)}{\log_2 8}+\frac{2\log_2(2x)}{\log_2 4}-5^{1-2\sin x}\cdot\log_2\big(2x^2-4x\big)=0,$$
$$\log_2(x-2)+\log_2(2x)-5^{1-2\sin x}\cdot\log_2\big(2x^2-4x\big)=0,$$
$$\log_2\big(2x^2-4x\big)-5^{1-2\sin x}\cdot\log_2\big(2x^2-4x\big)=0,$$
$$\log_2\big(2x^2-4x\big)\cdot\big(1-5^{1-2\sin x}\big)=0.$$

Innen $1-5^{1-2\sin x}=0$ vagy $\log_2\big(2x^2-4x\big)=0$.

Az első esetből $5^{1-2\sin x}=1=5^0$, ahonnan $1-2\sin x=0$, azaz $\sin x=\frac{1}{2}$. Ebből $x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x_2=\frac{5\pi}{6}+2n\pi$. Figyelembe véve az $x>2$ kikötést: $k\in\mathbb{N}^+$, $n\in\mathbb{N}$.

A második esetben $2x^2-4x-1=0$. Ennek gyökei: $\frac{4+2\sqrt6}{4}$, illetve $\frac{4-2\sqrt6}{4}$. A negatív gyök nem megoldás, így az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{N}^+$; $x_2=\frac{5\pi}{6}+2n\pi$, $n\in\mathbb{N}$; $x_3=\frac{4+2\sqrt6}{4}$.

3. *Egy 305 tagú társaságból elment a nők a%-a, így a társaság létszáma $\frac{a}{b}$%-kal csökkent, ahol $1<b<305$ egész szám. Hány férfi van a társaságban?* *(13 pont)*

Megoldás. Jelöljük n-nel a 305 tagú társaságban levő nők számát. Ha elment a nők a%-a, akkor a társaság létszáma $305-\frac{na}{100}$. Ezzel az egész társaság létszáma $\frac{a}{b}$%-kal csökkent, így felírhatjuk:

$$305-\frac{na}{100}=305\cdot\left(1-\frac{\frac{a}{b}}{100}\right),\qquad \frac{na}{100}=\frac{305a}{100b},\qquad\text{ahonnan}\qquad n=\frac{305}{b}.$$

Mivel n pozitív egész, és $b>1$ egész, továbbá $305=5\cdot61$, ezért csak $b=5$ vagy $b=61$ lehetséges. Ennek megfelelően a nők száma 61 vagy 5, vagyis a társaságban levő férfiak száma 300 vagy 244 fő.

4. *Egy konvex sokszög oldalainak a számát megdupláztuk, így átlóinak a száma 400%-kal növekedett.*

a) Hány oldalú az eredeti sokszög?

b) Hány százalékkal növekedett a sokszög belső szögeinek összege? *(13 pont)*

Megoldás. *a*) Ha a konvex sokszög oldalainak száma n, akkor átlóinak száma $\dfrac{n(n-3)}{2}$. Ha az oldalak számát megdupláztuk, akkor a $2n$ oldalú konvex sokszög átlóinak száma $\dfrac{2n(2n-3)}{2}$. Az utóbbi az előbbinek 400%-kal megnövelt értéke, vagyis 5-szöröse: $5 \cdot \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{2n(2n-3)}{2}$, $n \neq 0$, tehát ebből $5n - 15 = 4n - 6$, $n = 9$.

Vagyis az eredeti konvex sokszög oldalainak száma: $n = 9$.

b) Az eredeti sokszög belső szögeinek összege: $(n-2) \cdot 180 = 7 \cdot 180^\circ$.

Az új sokszög 18 oldalú, ennek belső szögösszege: $(2n-2) \cdot 180^\circ = 16 \cdot 180^\circ$.

Mivel $\dfrac{16 \cdot 180}{7 \cdot 180} \approx 2{,}286$, ezért a belső szögek összege kb. $128,6\%$-kal növekedett.

II. rész

5. *Milyen görbén helyezkednek el az $y = x^2 + mx + 1$ $(m \in \mathbb{R})$ parabolák csúcspontjai (tengelypontjai)?* (*16 pont*)

Megoldás. A függvényt teljes négyzetté alakítva:

$$y = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2-4}{4}.$$

Ezt összehasonlítva az $(u;v)$ csúcspontú $y - v = \dfrac{1}{2p}(x-u)^2$ parabolaegyenlettel a következőt kapjuk a csúcspont koordinátáira: $u = -\dfrac{m}{2}$, $v = -\dfrac{m^2-4}{4}$. A

$$v = -\frac{m^2-4}{4} = -\left(\frac{m}{2}\right)^2 + 1 = -\left(-\frac{m}{2}\right)^2 + 1$$

átalakítás után megállapítható, hogy $u = -\dfrac{m}{2}$ és $v = -\left(-\dfrac{m}{2}\right)^2 + 1$. Ez $\left(-\dfrac{m}{2}\right)$-re másodfokú, tehát parabola, egyenlete: $y = -x^2 + 1$.

A keresett ponthalmaz tehát parabola, egyenlete $y = -x^2 + 1$.

6. *Egy egyetem I. évfolyamán a nappali tagozatos hallgatók 20%-a jelesre vizsgázott analízisből. A levelező tagozaton 30%, míg a távoktatásban 10% volt a jelesek aránya. Az egyes tagozatok létszámáról tudjuk, hogy kétszer annyi távoktatásban részt vevő van, mint levelező, és a nappalisok és a távoktatásban részt vevők száma egyenlő.*

a) *Véletlenszerűen választva egy hallgatót, mekkora az esélye, hogy analízis jegye jeles?*

b) *Ha a véletlenül választott hallgató analízis jegye jeles, akkor mi az esélye, hogy ő nappalis?*

c) *A b)-beli feltétel mellett mi az esélye, hogy levelező, illetve távoktatásban szereplő hallgató az illető?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A levelezős diákok száma x, a nappalis, illetve a távoktatásban tanulóké pedig $2x$.

A nappalisok közül $0{,}2 \cdot 2x = 0{,}4x$ tanuló jelest, míg $0{,}8 \cdot 2x = 1{,}6x$ tanuló nem jelest kapott.

A levelezősök közül $0{,}3x$ diák jelest, és $0{,}7x$ diák más jegyet kapott.

Végül, a távoktatós hallgatók közül $0{,}1 \cdot 2x = 0{,}2x$ diák kapott jelest, $1{,}8x$ diák pedig egyéb érdemjegyet.

Az összes hallgatók száma $5x$. A kedvező esetek száma: $0{,}4x + 0{,}3x + 0{,}2x = 0{,}9x$.

A kérdezett valószínűség:

$$P = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{0{,}9x}{5x} = 0{,}18.$$

b) Az összes jelest kapott hallgató száma $0{,}9x$. A nappali tagozatos, jelest kapott (ami most a kedvező eset) diákok száma pedig $0{,}4x$.

A valószínűség:

$$P = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{0{,}4x}{0{,}9x} = \frac{4}{9}.$$

c) Távoktatásban $0{,}2x$ diák kapott jelest, tehát

$$P = \frac{0{,}2x}{0{,}9x} = \frac{2}{9}.$$

Mivel $0{,}3x$ levelező hallgató kapott jelest, azért

$$P = \frac{0{,}3x}{0{,}9x} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

7. *a*) *Határozzuk meg $n \to \infty$ esetén az*

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 4}$$

sorozat határértékét, s azt az n számot, amelytől kezdve a sorozat elemei a sorozat határértékétől $\frac{1}{200}$-nál kisebb értékkel térnek el.

b) Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy $6 \mid n^3 + 5n$, ha n pozitív egész szám. (*16 pont*)

Megoldás. *a)* $A = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3n-1}{n^2+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}} = 2.$

A sorozat határértéke 2.

Meg kell állapítani, hogy milyen n-től kezdve lesz $|a_n - A| < \dfrac{1}{200}$, azaz

$$\left|\frac{2n^2+3n-1}{n^2+4} - 2\right| < \frac{1}{200}.$$

Elvégezve az összevonásokat: $\left|\dfrac{3n-9}{n^2+4}\right| < \dfrac{1}{200}$.

Mivel $n > 3$ esetén a bal oldal pozitív, ezért az abszolút érték jele elhagyható: $\dfrac{3n-9}{n^2+4} < \dfrac{1}{200}$. Az egyenlőtlenséget rendezve kapjuk: $n^2 - 600n + 1804 > 0$. Az $n^2 - 600n + 1804 = 0$ egyenletet megoldva kapjuk, hogy $n_1 \approx 3{,}02$ és $n_2 \approx 596{,}98$. Sorozatról van szó, így csak $n \geq 597$ lehet a megoldás.

b) Az állítást $n = 1$-re felírva: $1 + 5 = 6$, ami nyilván osztható 6-tal, tehát $n = 1$-re az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy $k = n$ esetén teljesül, hogy $6 \mid k^3 + 5k$.

Írjuk fel a kifejezést $n = k + 1$-re:

$$(k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = (k^3 + 5k) + (3k^2 + 3k) + 6.$$

Az $k^3 + 5k$ az indukciós feltétel miatt osztható 6-tal. $3k(k+1)$ a 3 miatt osztható 3-mal, a $k(k+1)$ pedig két egymást követő természetes szám szorzata és így osztható 2-vel. A kifejezés tehát három 6-tal osztható tag összege, így osztható 6-tal.

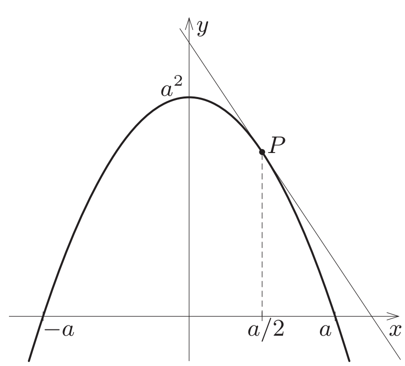
A bizonyítást befejeztük.

8. *Az $f(x) = -x^2 + a^2$ $(a > 0)$ függvény görbéjének x tengely fölötti részét körbeforgatjuk az x tengely körül $360°$-kal. A keletkezett forgástest térfogata az a sugarú gömb térfogatának kétszerese.*

a) Határozzuk meg az a paraméter értékét.

b) Mekkora területű háromszöget vág le a koordinátatengelyekből a függvény $x = \dfrac{a}{2}$ helyhez tartozó érintője? (*16 pont*)

Megoldás. A függvény képe egy lefelé nyíló parabola, melynek zérushelyei a-ban és $(-a)$-ban vannak, az y tengelyt pedig a^2-ben metszi.



a) Az x tengely feletti rész x tengely körüli $360°$-os elforgatottjának térfogata:

$$V = \pi \int_{-a}^{a} f^2(x)\,dx.$$

A szimmetria miatt az integrált elég kiszámítani a $[0; a]$ intervallumban, és a kapott eredmény kétszeresét venni:

$$V = 2\pi \int_0^a \left(-x^2 + a^2\right)^2 dx = 2\pi \int_0^a \left(x^4 + a^4 - 2x^2a^2\right) dx =$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^5}{5} + a^4x - 2a^2\frac{x^3}{3}\right]_0^a = 2\pi\left(\frac{a^5}{5} + a^5 - \frac{2}{3}a^5\right) = \frac{16a^5\pi}{15}.$$

A feltétel szerint ez a térfogat az a sugarú gömb térfogatának kétszerese, vagyis $\frac{16a^5\pi}{15} = \frac{8a^3\pi}{3}$, amiből $a^2 = \frac{5}{2}$, és így $a = \sqrt{\frac{5}{2}} \quad (a > 0)$.

b) Az $\frac{a}{2}$ abszcisszájú P pont koordinátái $P\left(\frac{a}{2}; f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$, azaz $P\left(\frac{a}{2}; \frac{3}{4}a^2\right)$. Az érintő m meredeksége az $x = \frac{a}{2}$ helyen vett differenciálhányados értéke. Mivel $f'(x) = \left(-x^2 + a^2\right)' = -2x$, ezért $m = f'\left(\frac{a}{2}\right) = -2 \cdot \frac{a}{2} = -a$.

Az érintő egyenlete: $y - \frac{3}{4}a^2 = -a\left(x - \frac{a}{2}\right)$. Ez az érintő az x tengelyt az $(x_1; 0)$ pontban, az y tengelyt a $(0; y_1)$ pontban metszi, és így $y_1 - \frac{3}{4}a^2 = \frac{a^2}{2}$, illetve $-\frac{3}{4}a^2 = -ax_1 + \frac{a^2}{2}$. Ebből pedig $y_1 = \frac{5}{4}a^2$, valamint $x_1 = \frac{5}{4}a$ következik.

Így a derékszögű háromszög területe: $T = \frac{x_1 y_1}{2} = \frac{25}{32}a^3$ területegység.

9. *Négy egész szám közül az első három egy számtani, az utolsó három egy mértani sorozat három szomszédos eleme. A két középső szám összege* 50*, a két szélső szám összege* 55*. Melyik ez a négy szám?* (*16 pont*)

Megoldás. Legyen a négy szám: a, b, c, d. A feltételek alapján:

$$\frac{a+c}{2} = b, \tag{1}$$

$$c^2 = bd, \tag{2}$$

$$a + d = 55, \tag{3}$$

$$b + c = 50. \tag{4}$$

Ez utóbbiból $b = 50 - c$ következik. Ezt (1)-be helyettesítve: $\frac{a+c}{2} = 50 - c$, vagyis $a = 100 - 3c$.
A kapott eredményt (3)-ba írva: $100 - 3c + d = 55$, vagyis $d = 3c - 45$.
A részeredményeket (2)-be helyettesítve kapjuk: $c^2 = (50 - c)(3c - 45)$.
Rendezés után: $4c^2 - 195c + 2250 = 0$. Ennek megoldásai: $c_1 = 30$, $c_2 = 18{,}75$.
A feladat értelmében egész számokat keresünk, így csak a $c = 30$ lehet a megoldás.
Így a négy szám: 10, 20, 30, 45, amelyek megfelelnek a feltételnek.