

1. Bevezetés

A matematikai definíciót megelőlegezve, diszkrét idejű dinamikus rendszerről beszélünk, ha a természetes számokkal jelzett időpontokban a rendszer valós számmal vagy számegyüttesel (vektorral) jellemzett állapota megadja a rendszer állapotát a következő időpontban. (Szemléletünknek jobban megfelelne a folytonos idő, de matematikai elemzése túlmutatna a középiskolai kereteken.) „Definíciónkból” logikailag az is következik, hogy bármennyi időszakkal előre ki tudjuk számítani a rendszer állapotát. Például ha tudjuk, hogy ma délben hol volt a Nap az égbolton, akkor azt is tudni fogjuk, hogy hol lesz a Nap holnap délben. Ebből logikailag az is következik, hogy bármennyi nappal előre meg tudjuk jósolni a Nap déli 12 órai helyzetét.

Egyszerű rendszerről beszélünk, ha az állapotváltozást leíró, ún. *állapotegyenlet* matematikailag „egyszerű”. Találó fizikai példa az egyszerű és a bonyolult dinamikai rendszerre: a Föld Nap-körüli pályája, illetve az örvény. Újabb fogalmat definiálva, azt mondjuk, hogy a rendszer *előrejelezhetően* viselkedik, ha a kezdőállapot mérésénél elkövetett parányi hiba ellenére időben elég sokáig jól (viszonylag pontosan) előre tudjuk jelezni az állapotot.

Első látásra azt gondolhatnánk, hogy bármely egyszerű dinamikus rendszer viselkedése előrejelezhető. Ebben az írásban egyszerűen, de szabatosan próbáljuk elmagyarázni, hogy ez csak bizonyos rendszereknél igaz; de más, ugyancsak egyszerű rendszereknél nincs így. Például a Nap vagy a Föld helyzetének előrejelzésénél igaz, de a kettősingánál vagy az időjárás nagyon leegyszerűsített modelljénél nem. A döntő különbséget a jelen állapotot a következő állapotba átvivő leképezés *nemlinearitása* okozza.

Ragogó népszerűsítő leírást ad a témakörrel Gleick [2]. Röviden utalunk arra, hogy a középiskolás Olvasó gyakran látott már kaotikus vagy ahhoz hasonló dinamikával készített *fraktálokat*, ezzel azonban csak cikkünk végén, érintőlegesen foglalkozunk.

2. Lineáris dinamikus rendszerek

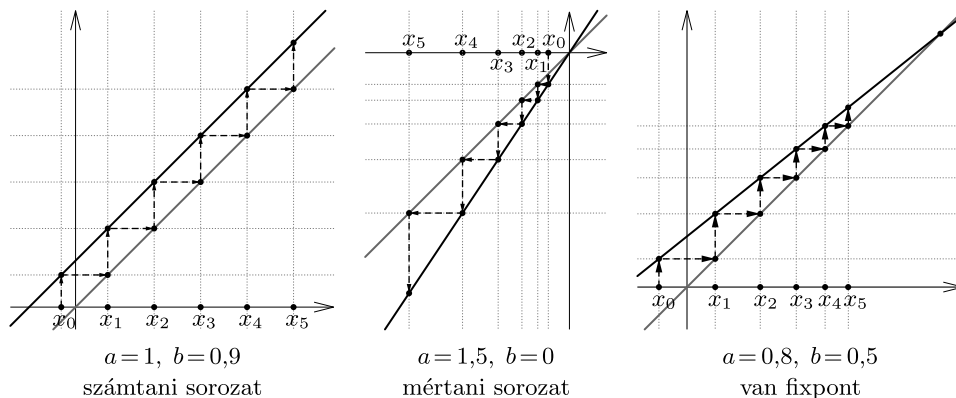
A matematikai tárgyalásra térve definiálunk egy diszkrét idejű, időben változatlan működésű, lineáris skaláris *dinamikus rendszert*. Legyen x egy $[0, 1]$ -beli valós szám, amely a rendszer állapotát jelképezi, $t = 0, 1, 2, \dots$ pedig az időpontok indexe. Lineáris rendszerünk állapotegyenletét egy lineáris függvény adja:

$$(1) \quad x_{t+1} = ax_t + b, \quad t = 1, 2, \dots,$$

ahol a és b két valós szám, és az x_0 *kezdőállapot* adott. Ez az állapotegyenlet a számtani sorozat ($a = 1$), illetve a mértani sorozat ($b = 0$) közös általánosítása.

Lineáris rendszernek, ha létezik ún. *egyensúlyi helyzete*: x° , akkor az a leképezés fixpontja:

$$(2) \quad x^\circ = ax^\circ + b.$$



Az (1) által leírt rendszernek csak akkor nem létezik egyensúlyi helyzete, ha $a = 1$ és $b \neq 0$. Ez a leképezés a jól ismert számtani sorozat, amelynek explicit megoldása $x_t = x_0 + bt$, amely nyilvánvalóan a végtelenbe tart. A továbbiakban ezt általában kizárjuk.

¹Köszönetet mondok Garay Barnabásnak értékes megjegyzéseiért.

1. tétel. a) Ha $a \neq 1$, akkor az (1) lineáris rendszer egyensúlyi helyzete létezik és értéke

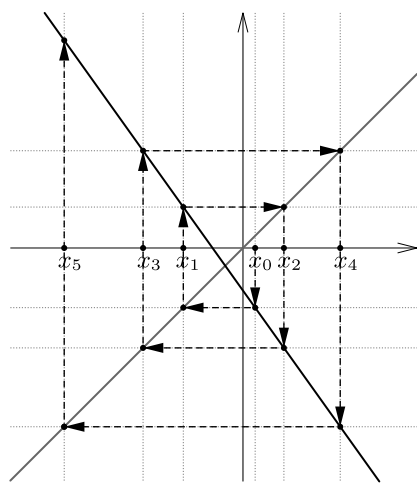
$$x^\circ = \frac{b}{1-a}.$$

b) Ekkor a megoldás expliciten a következőképpen adható meg:

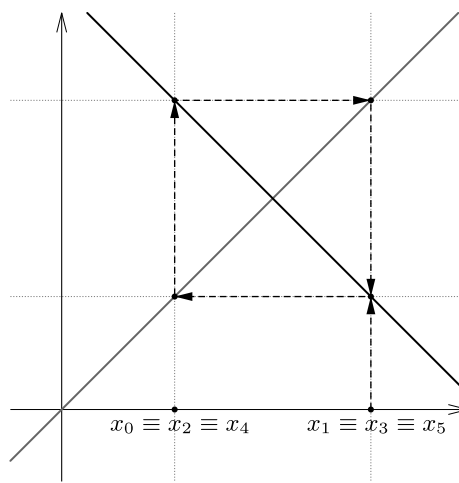
$$(3) \quad x_t - x^\circ = a^t(x_0 - x^\circ), \quad t = 1, 2, \dots$$

Bizonyítás. Vonjuk ki az (1) egyenletből a (2) egyenletet: $x_{t+1} - x^\circ = a(x_t - x^\circ)$. A mértani sorozat képlete szerint adódik (3). \square

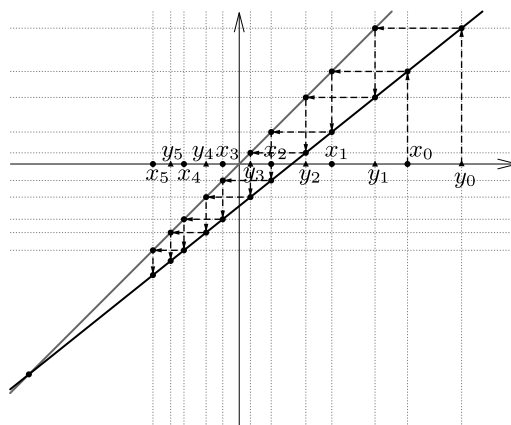
A (3) segítségével érdekes megfigyelések tehetők a lineáris rendszer viselkedéséről. a) A (3) megoldás akkor és csak akkor *korlátos*, ha $|a| < 1$ vagy $a = -1$. b) $a = -1$ esetén a (3) egyenlet 2-ciklust ad: $x_1 = -x_0 + b$ és $x_2 = x_0$ (fűrészfog). A továbbiakban feltesszük, hogy $|a| < 1$. c) Ekkor minden közeli x_0 esetén x_t közel *marad* x° -hoz: *stabilitás*. d) Az x_t állapot *tart* x° -hoz minden x_0 esetén: *aszimptotikus stabilitás*. (Mellesleg a korábban már kizárt $a = -1$ -re a c) teljesül, de d) nem teljesül.) e) Legyen egy másik pálya $y_{t+1} = ay_t + b$, kivonva egymásból a két egyenletet: $y_{t+1} - x_{t+1} = a(y_t - x_t)$, tehát a közelről induló pályák közel maradnak egymáshoz. (Mellesleg ez a tulajdonság a korábban már kizárt $a = 1$ -re is igaz.)



$|a| > 1, b = -1,6$
nem korlátos



$a = -1, b = 0,7$



$a = 0,8, b = -0,4$

Az 1. táblázat a legfontosabb pályatípusokat mutatja be konkrét számpéldákon. Az áttekinthetőség kedvéért az állapotok értékét 3 tizedesjegyre kerekítve adjuk meg, de ennél több értékes jegyre számolunk.

Számtani sorozat: $x_{t+1} = x_t + 1$, nem korlátos. Fűrészfog: $x_{t+1} = -x_t$, 2-ciklus, amely stabil, de nem aszimptotikusan stabil. Eltűnő sorozat: $x_{t+1} = 0,5x_t$, aszimptotikusan stabil. A kezdőállapot mindhárom esetben 1.

1. táblázat. Három pályatípus

Idő	Számtani sorozat	Fűrészfog	Eltűnő sorozat
t	x_t	y_t	z_t
0	1	1	1
1	2	-1	0,500
2	3	1	0,250
3	4	-1	0,125
4	5	1	0,063
5	6	-1	0,031

A továbbiak szempontjából érdekes, hogy a lineáris leképezés mikor hagyja helyben a $[0, 1]$ szakaszt. Az $|a| < 1$ esetben belül két alesetet kell megkülönböztetnünk: $0 \leq a < 1$ esetén a $[0, 1]$ szakasz a $[b, a + b]$ szakaszba képződik le, amely akkor része $[0, 1]$ -nek, ha $b \geq 0$ és $a + b \leq 1$. $-1 < a < 0$ esetén a $[0, 1]$ szakasz az $[a + b, b]$ -be képződik le, amely akkor része $[0, 1]$ -nek, ha $a + b \geq 0$ és $b \leq 1$.

3. Nemlineáris dinamikus rendszerek

Egyszerűségük miatt a lineáris rendszerek modelljei nagyon gyakran nagyon hasznosak, de máskor túl kell lépünk rajtuk (vö. Simonovits [2]). Például olyan korlátos rendszert vizsgálunk, amely nem stabil. Ehhez szükségünk van egy f függvényre, amely a $[0, 1]$ szakaszt önmagába képezi le. A dinamikus rendszer mozgását, az állapotváltozást az állapotegyenlet írja le:

$$(4) \quad x_{t+1} = f(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, T, \quad x_0 \text{ adott.}$$

Feltehetjük, hogy az f függvény folytonos, azaz közeli kezdőállapotokból induló pályák az első időszakban is közel maradnak egymáshoz. A folytonosságnak egy speciális alakját választva, feltesszük, hogy van olyan $L > 0$ állandó, amelyre a képpontok távolsága legfeljebb L -szerese a tárgyponthoz:

$$(5) \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \text{ minden } (x, y) \text{ párra.}$$

Lineáris leképezésnél (5)-ben például $L = |a|$ megfelelő.

Azt, hogy ez a feltevés nem minden folytonos függvényre teljesül, a $[0, 1]$ szakaszon definiált $f(x) = \sqrt{x}$ négyzetgyök-függvény példája mutatja. Valóban, az $x = 0$ és $y \neq 0$ pontpár esetén a kép- és a tárgyponthoz távolságának az aránya,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

a 0 közelében nem korlátos.

(4)-ben egymás után elvégezve a behelyettesítéseket, a t -edik időszak állapota elvileg egyszerű függvénye marad a kezdőállapotnak, de a lineáris esettel ellentétben, általában nincs explicit megoldás. Teljes indukcióval (5)-ből könnyen levezethető, hogy a szomszédos (egymáshoz közeli x_0 kezdőértékkel rendelkező) pályákra teljesül

$$(6) \quad |y_t - x_t| \leq L^t |y_0 - x_0|, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Ha csak adott T -ig vagyunk kíváncsiak az eltérésre, akkor akármilyen nagy is L , (6) jobb oldala is korlátos marad. Ahhoz viszont, hogy akármekkora T -re korlátos maradjon az eltérés, (6) értelmében az $L \leq 1$ egyenlőtlenséget kellene feltennünk. Megelégszünk egy lazább definícióval.

Előrejelezhetőségről beszélünk vagy azt mondjuk, hogy a rendszer *érzéketlen* az x_0 kezdőértékre, ha megfelelően közeli kezdőállapotból induló pályák mindvégig megfelelően közel maradnak. Például mégha 1 perc hibával mérjük a delet, akkor sem veszítjük szem elől a Nap pályáját az égbolton vagy a Föld pályáját a Nap körül. Ugyanígy jól előrejelezhetjük az ágyúból kilőtt golyó pályáját.

A lineáris rendszerekben bevezetett egyensúlyi helyzet általánosítható a nemlineáris rendszerekre. Képletben: x° egyensúlyi helyzet, ha $x^\circ = f(x^\circ)$. Hamarosan látni fogjuk, hogy adott rendszernek létezhet több egyensúlyi helyzete is.

Már a lineáris rendszer tárgyalásakor láttuk, hogy egy egyensúlyi helyzet vagy stabil vagy instabil. Matematikai szabadságról lemondva, azt mondjuk, hogy az x° egyensúlyi helyzet *lokálisan stabil*, ha minden, hozzá elég közeli kezdőállapotból induló pálya közel marad. Már a lineáris esetben utaltunk az erősebb stabilitás fogalomra is, amelyet *lokális aszimptotikus stabilitásnak* nevezünk: a közeli kezdőállapotból induló pályák nemcsak közel maradnak, hanem aszimptotikusan tartanak az egyensúlyi helyzethez. *Globálisan* aszimptotikusan stabilnak nevezük a rendszert, ha az aszimptotikus közelítés tetszőleges kezdeti állapotokra igaz. (Például a pincér tálcáján billegő tányér helyzete csak lokálisan stabil, de globálisan nem.)

Ha (5)-ben $L < 1$ áll, akkor a leképezést *kontrakciónak* (zsugorításnak) nevezik, s ez szavatolja az egyensúlyi helyzet egyértelműségét és globális aszimptotikus stabilitását.

Könnnyű belátni, hogy a lineáris rendszerekhez hasonlóan a nemlineáris rendszerekben is igaz a következő állítás:

2. tétel. Ha egy egyensúlyi állapot stabil, akkor a (4) rendszer összes pályája érzéketlen az egyensúlyhoz közeli kezdeti feltételekre.

Bizonyítás. Valóban, a két pálya távolsága

$$y_t - x_t = y_t - x^\circ + x^\circ - x_t$$

alapján becsülhető:

$$(7) \quad |y_t - x_t| \leq |y_t - x^\circ| + |x^\circ - x_t|.$$

A stabilitás miatt (7) jobb oldalán mindkét tag kicsi, tehát összegük is az. □

Talán a legegyszerűbb nemlineáris függvény a logisztikus függvény, és az általa létrehozott dinamikus rendszer kiváló gyakorlóterep a vizsgálatokra:

$$(8) \quad x_{t+1} = ax_t(1 - x_t).$$

Könnyű belátni, hogy $0 < a \leq 4$ esetén a logisztikus leképezés a $[0, 1]$ szakaszt a $[0, 1]$ szakaszba képezi le.

A következőkben e leképezés paraméter-intervallumát leszűkítjük: $1 < a \leq 4$, s az általa definiált dinamika egyensúlyi helyzetét és stabilitását, illetve annak hiányát elemezzük.

Helykímélés céljából közös táblázatban mutatjuk be a négy különböző paraméterértékre, de azonos kezdőértékre vonatkozó dinamikát (az 5 paraméterérték a táblázatban látható). Az $x_t(a)$ jelölés a paramétertől való függésre utal. A pályák elnevezése csak később válik világosabbá.

2. táblázat. Különböző paraméterű logisztikus pályák

A s z i m p t o t i k u s a n				
Idő	stabil	2-ciklikus	3-ciklikus	Kaotikus
t	$x_t(2)$	$x_t(3,2)$	$x_t(3,839)$	$x_t(4)$
0	0,140	0,140	0,140	0,140
1	0,241	0,385	0,462	0,482
2	0,366	0,758	0,954	0,999
3	0,464	0,587	0,168	0,005
4	0,497	0,776	0,535	0,022
5	0,500	0,557	0,955	0,084
6	0,500	0,790	0,165	0,309
7	0,500	0,531	0,529	0,853
8	0,500	0,797	0,956	0,500
9	0,500	0,518	0,160	1,000
10	0,500	0,799	0,516	0,000
11	0,500	0,514	0,959	0,000
12	0,500	0,799	0,152	0,000
13	0,500	0,513	0,494	0,000
14	0,500	0,799	0,960	0,001
15	0,500	0,513	0,149	0,003

A 2. táblázat 1. pályája aszimptotikusan stabil, már a $t = 5$ időszakban eléri az egyensúlyi helyzetet (legalábbis az első 3 tizedesjegyben). Ezt általánosítja a

3. tétel. a) $1 < a \leq 4$ esetén a (8) logisztikus rendszer egyensúlyi helyzete

$$x^\circ = \frac{a-1}{a} \in (0, 1).$$

b) $1 < a \leq 3$ esetén az x° egyensúlyi helyzet – kivételes kezdőállapotoktól eltekintve – globálisan aszimptotikusan stabil, $3 < a \leq 4$ esetén nem.

Bizonyítás. a) pontja triviális, a b) pontja is igazolható, de ettől eltekintünk. □

Valójában a logisztikus leképezésnek még egy egyensúlyi helyzete van, a triviális 0 pont, ettől azonban eltekintünk. Nemcsak az onnan, de az 1-ből induló pálya is 0-ba ugrik, és ott is marad.

A természetben számos dinamikus rendszer pályája ismétlődik. Például a Nap körül keringő Föld (kerekítve) 365 naponként visszatér eredeti helyzetébe. A szívverés és a légzés is periodikus. Diszkrét idejű rendszerben egy $P > 1$ természetes szám esetén P -ciklusról beszélünk, ha az f leképezés hatására keletkező (x_t) pálya P időszakonként ismétlődik. Formálisan: az (x_1, x_2, \dots, x_P) vektort P -ciklusnak nevezzük, ha teljesül a következő egyenlőségsorozat:

$$x_2 = f(x_1), \quad \dots, \quad x_P = f(x_{P-1}) \quad \text{és} \quad x_1 = f(x_P).$$

Ebből következik, hogy folytatáskor tetszőleges természetes k -ra $x_{Pk+r} = x_r$, $r = 1, 2, \dots, P$. Elfajult eseteket kizárólag feltesszük, hogy a nevezett vektor minden eleme különböző.

A lineáris esetben már találkoztunk a fűrészfog-ciklussal. Ez a ciklus az egyenesnek az origóra való tükrözéséből adódik, és nem túl érdekes. Annál érdekesebb viszont a 2. táblázat 2. pályája, amely a $t = 12$. időszakban visszatér a két időszakkal korábbi helyzetébe, és ez rendületlenül ismétlődik. Ezt fejezi ki általánosabban is a

4. tétel. A (8) *logisztikus leképezésnek van 2-ciklusa, ha $3 < a \leq 4$.*

Bizonyítás. Egyelőre tegyük föl, hogy valóban van 2-ciklus, jele (x_1, x_2) . Ekkor igaz, hogy

$$x_2 = ax_1(1 - x_1) \quad \text{és} \quad x_1 = ax_2(1 - x_2).$$

Behelyettesítve a második egyenletet az elsőbe (vagy fordítva):

$$x_r = a[ax_r(1 - x_r)][1 - ax_r(1 - x_r)], \quad r = 1, 2.$$

Negyedfokú egyenletet kaptunk, amelynek egyik gyöke $x_3 = 0$, a másik gyöke a 3. tételbeli fixpont: $x_4 = (a - 1)/a$. Elhagyva az indexet, először elosztjuk az egyenletet x -szel:

$$a^3x^3 - 2a^3x^2 + a^2(1 + a)x + 1 - a^2 = 0.$$

A kapott harmadfokú egyenletet $(x - x_4)$ -gyel osztva, egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$a^2x^2 - a(a + 1)x + a + 1 = 0.$$

Az ismert megoldóképletet alkalmazva megkapjuk a feltételezett 2-ciklust:

$$(9) \quad x_{1,2} = \frac{(a + 1) \pm \sqrt{(a + 1)(a - 3)}}{2a}.$$

A megadott paraméterszakaszon $0 < x_{1,2} < 1$.

Figyeljük meg, hogy ha felülről közelítjük $a = 3$ -at, akkor a 2-ciklus mindkét eleme az eltűnő diszkrimináns miatt az éppen instabillá váló egyensúlyi helyzethez tart. Fordítva haladva, azt mondjuk, hogy az egyensúlyi helyzet kettéágazik. \square

Megjegyzések. 1. Magasabb matematikai eszközökkel belátható, hogy $3 < a < 1 + \sqrt{6} = 3,44 \dots$ esetén a kivételtől eltekintve, akármilyen kezdőállapotból indítsuk is e rendszert, a pálya aszimptotikusan tart az itt megadott 2-ciklushoz. Az egyensúlyi állapot azonban instabil, és kivételesen itt érzékenyen függ a pálya a kezdőfeltételtől.

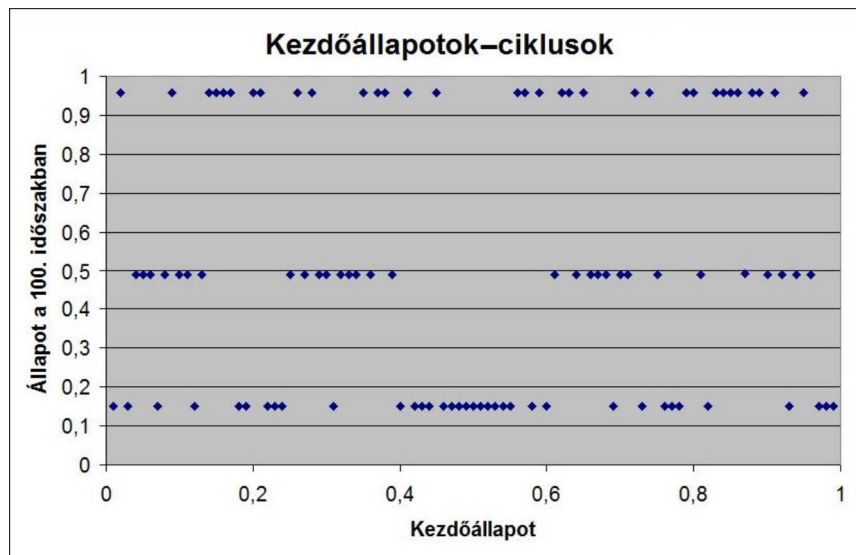
2. Természetesen figyelembe kell venni, hogy (x_2, x_1) is geometriailag ugyanezt a 2-ciklust adja meg, mint (x_1, x_2) .

2. példa. Ha a paraméterérték növelése miatt a (9)-beli 2-ciklus instabillá válik, akkor (8)-nak még létezik más ciklusa is, csak nincs rá explicit képletünk. A 2. táblázat 3. pályája egy 3-ciklushoz tart, amelynek pontjai 6 tizedesjegyre:

$$x_1 = 0,149\,888; \quad x_2 = 0,489\,172 \quad \text{és} \quad x_3 = 0,959\,299.$$

Sőt, ez a ciklus globálisan stabil: kivételes kezdőértékektől eltekintve, az összes pálya rátekeredik e ciklusra.

Egy meglepő tétel (Sarkovszkij, 1963) szerint a 3-ciklus létezéséből következik, hogy akármilyen $P > 1$ egészre P -ciklus is létezik. Persze, a 2. példában ezek a ciklusok a 3-ciklus kivételével instabilak. Az 1. ábra azt mutatja meg, hol helyezkedik el a rendszer a 100. időszakban, ha egymás után a $[0, 1]$ szakaszon egyenletes távolságban elhelyezkedő 99 pontot választjuk kezdőállapotnak: $x_0 = 0,01; 0,02; \dots; 0,99$. Az 1. ábra tanúsága szerint a 99 pálya mindegyike a 100. időszakban már az 1., a 2. és a 3. cikluspont valamelyikéhez olyan közel ért, hogy az eltérés szabad szemmel már nem is látható: globális stabilitás. (Ez a konvergencia már 20 időszak alatt is majdnem végbemegy.) Ugyanakkor, ha azt kérdezzük, hogy a 3 pont közül melyik közelébe ér az adott kezdőállapotból induló pálya a 100. időszakban, akkor nagyon bonyolult a válasz. Az így osztályozott kezdőállapotok a $[0, 1]$ szakaszon szeszélyesen helyezkednek el. Ezeket a halmazokat nevezte el 1985 körül Mandelbrot *fraktálnak*, de már 1830 körül megjelentek a matematikában, csak sokáig bűvőpatakként csordogáltak.



1. ábra. Melyik cikluspont közelében lesz a rendszer a 100. időszakban?

4. Kaotikus viselkedés

Van, aki már a 2. példát is kaotikusnak nevezi (erre utal a „3-ciklus káoszt implikál” Li–Yorke-tétel, 1973). Mi azonban szigorúbbak vagyunk, ebben az esetben csak *átmeneti* káoszról beszélünk, hiszen véges időn belül a stabil ciklus környékére érve a további út már előrejelezhető.

A következőkben már valóban megérkezünk a címben szereplő kaotikus viselkedés világába. Nemcsak azt látjuk be, hogy $a = 4$ -re a logisztikus rendszer mindenütt érzékeny a kezdőfeltételre, azaz előrejelezhetetlen, hanem tovább is lépünk: akármennyi idő eltelte után megmarad a határozatlanság, azaz a további pálya érzékenyen függ az x_t állapottól. A 2. táblázat 4. pályája valóban szeszélyesen viselkedik: 3 tizedesjegyre kerekítve (de több tizedesjeggyel számolva), a pálya a $t = 9$ időszakban 1, utána 4 időszakon keresztül a triviális egyensúlyi helyzetben (legalábbis annak nagyon közeli környezetében) rejtőzik, majd a 14. és a 15. időszakban újra nőni kezd. Ez is a kezdeti értéktől való érzékeny függőséget mutatja.

5. tétel. Az $x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$ leképezés esetén a dinamika mindenütt érzékeny a kezdőfeltételre.

Bizonyítás. A dinamikát az $x_t = \sin^2 \varphi_t$ transzformáció segítségével vizsgáljuk meg. Felhasználva a $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ képletet, egyszerű számolással adódik $\sin^2 \varphi_{t+1} = \sin^2 2\varphi_t$, azaz elhagyva a 2π vagy többszörösnyi eltéréseket,

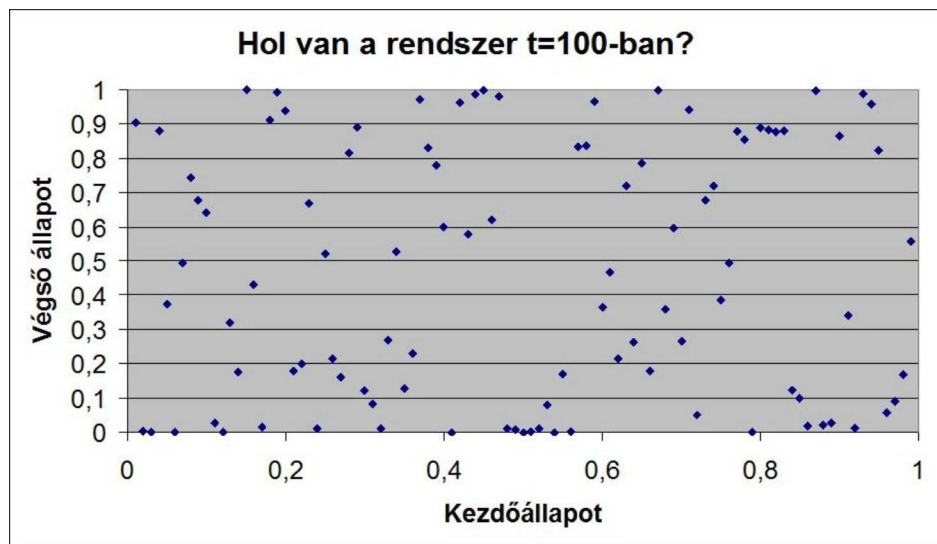
$$\varphi_{t+1} \equiv 2\varphi_t.$$

Legyen a szomszédos pálya $y_{t+1} = 4y_t(1 - y_t)$. Az $y_t = \sin^2 \psi_t$ jelöléssel,

$$\psi_{t+1} \equiv 2\psi_t.$$

A két szögdinamika eltérése $0 < \psi_t - \varphi_t < \pi$ esetén $\psi_{t+1} - \varphi_{t+1} = 2(\psi_t - \varphi_t)$ stb. az $L = 2$ éles korlát miatt a dinamika kaotikus.

Az 1. ábrán szereplő 99 kezdőállapotból indítva kaotikus rendszerünket, még a 100. időszakra sem világos, hol lesz a rendszer.



2. ábra. Hol lesz a kaotikus rendszer a 100. időszakban?

Az, hogy általában milyen bonyolult kérdésről van szó, jól mutatja, hogy nem tudjuk megmondani, hogy $a = 4$ -en kívül mikor kapunk még kaotikus viselkedést. Csak az ismert, hogy a kaotikus pályát adó a paraméterek "sokan" vannak, és a $[3,57\dots, 4]$ szakaszon helyezkednek el.

Természetesen sok más kaotikus rendszer létezik, például az ún. *sátorleképezés*, ahol

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1/2; \\ 2 - 2x, & \text{ha } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

5. Összefoglalás

Ebben a cikkben a diszkrét idejű skalár dinamikus rendszert tanulmányoztuk. Megvizsgáltuk az egyensúlyi helyzet létezését és stabilitását. Példát mutattunk 2- és 3-ciklusokra. Végül bemutattunk egy olyan rendszert, amely előre-jelezhetetlenül működik: kaotikusan viselkedik. A lehető legegyszerűbb rendszerekre szorítkoztunk, s eltekintettünk a többváltozós, több időszaki késleltetésű rendszerek elemzésétől. A folytonos idejű rendszerek vizsgálata is fontos lenne, de meghaladná kereteinket.

Hivatkozások

- [1] Gleick, J. (1988): *A káosz. Egy új tudomány születése*. Magyar fordítás: Bp. Göncöl Kiadó, 1999.
- [2] Simonovits, A.: *Szakaszokon értelmezett leképezések fixpontjairól*, KöMaL, **5** (2012), 264–273.

"sokan"