I. rész

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

a) Hány $f\colon A \to B$ *függvény létezik?*

b) Ezek közül hány olyan van, amely szigorúan monoton növő?

c) Az a) pontban tekintett összes függvény között hány olyan van, amelynek értékkészlete pontosan három elemet tartalmaz? *(12 pont)*

Megoldás. *a*) Az A halmaz minden eleméhez a B halmaz bármelyik elemét rendelhetem, azaz nyolc elem közül választhatok. Mivel az A halmazban négy elem van, a függvények száma: $8^4 = 4096$.

b) Ilyenkor az értékkészlet négy elemű. A B halmazból tetszőlegesen választott négy elem esetén a szigorúan monoton növő függvény egyértelműen meghatározott. A keresett függvények száma tehát: $\binom{8}{4} = 70$.

c) Ha az értékkészlet három elemű, akkor az A halmaz két eleméhez ugyanazt rendeljük, a másik kettőnek az értéke viszont ettől és egymástól is különböző. Kiválasztjuk A azon két elemét, melyek értéke azonos lesz, ezt $\binom{4}{2} = 6$ féleképpen lehet megtenni, hozzájuk a B halmazból nyolc féle elemet rendelhetünk. Az A halmazból a maradék két elem közül a kisebbhez hét, a nagyobbhoz hat féle számot rendelhetünk a B halmazból. Tehát a keresett függvények száma: $\binom{4}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2016$.

2. *a) Osszuk fel az 1-et négy nemnegatív részre úgy, hogy a részek számtani sorozatot alkossanak. Milyen nagy lehet a sorozat differenciája?*

b) Osszuk fel az 1-et négy részre úgy, hogy a részek 2 hányadosú mértani sorozatot alkossanak. Mennyi a sorozat első eleme?

c) Osszuk fel az 1-et négy részre úgy, hogy a részek mértani sorozatot alkossanak. Milyen nagy lehet a sorozat hányadosa? *(12 pont)*

Megoldás. *a*) Jelölje a számtani sorozat első elemét a, a differenciát d. Ekkor $a \geq 0$. A feltétel szerint $1 = 4a + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3d$, azaz $1 \geq 6d$, tehát $\frac{1}{6} \geq d$ és $a = \frac{1}{4} - \frac{3}{2}d$. A $d = \frac{1}{6}$ eset is lehetséges, ekkor $a = 0$.

b) Legyen a sorozat első eleme g. Ekkor $1 = g(2^4 - 1) = 15g$, azaz $g = \frac{1}{15}$.

c) Jelölje az első elemet g, a hányadost pedig q. Most $q > 0$, így $g > 0$. A feltétel szerint $1 = g\frac{q^4 - 1}{q - 1}$, ahonnan $\frac{1}{g} = q^3 + q^2 + q + 1 < 4q^3$, ha $q > 1$. Mivel g-ről csak annyit kötöttünk ki, hogy pozitív, $\frac{1}{g}$ akármilyen nagy lehet. Innen pedig következik, hogy a mértani sorozat hányadosa is akármilyen nagy lehet.

3. *Adjuk meg az* $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$ *függvény értelmezési tartományát és értékkészletét.* *(13 pont)*

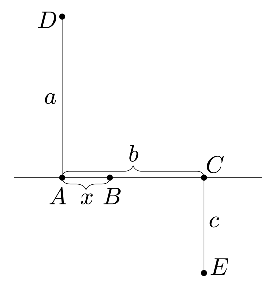
Megoldás. A függvény értelmezési tartománya a -2-nél nem nagyobb, illetve a 2-nél nem kisebb számok. Vizsgáljuk meg, hogy az $y = x + \sqrt{x^2 - 4}$ paraméteres egyenletnek milyen y-ra van megoldása. Rendezve: $y - x = \sqrt{x^2 - 4}$. Az $x^2 \geq 4$ feltételt teljesítő számok adják a jobb oldal értelmezési tartományát, és csak olyan x értékek adhatnak megoldást, melyekre $y \geq x$. Elvégezve a négyzetre emelést, rendezés után az $y^2 + 4 = 2yx$ egyenletre jutunk. Ennek (és az eredetinek) $y = 0$ esetén nincs megoldása, tehát $x = \frac{y^2 + 4}{2y}$. Figyelembe véve az $y \geq x$ feltételt, $0 \geq \frac{4 - y^2}{2y}$. Ennek megoldása: $-2 \leq y < 0$ vagy $2 \leq y$. Ezekhez az y értékekhez tartozó x-ek megoldásai a feladatnak, így megkaptuk az értékkészletet.

4. *Keressük meg az alábbi függvény minimumhelyét:*

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(b - x)^2 + c^2}, \quad \text{ahol} \quad a, b, c, x \in \mathbb{R}^+.$$

(14 pont)

Megoldás. A feladat szövegéből nem következik, hogy *geometriai szélsőérték problémával van dolgunk,* de a „Pithagorasz-tétel gyanús” kifejezések látványa, és a feladatban szereplő pozitív paraméterek orientálják a megoldást.



Vegyük fel az $AC = b$ hosszúságú szakaszt, annak végpontjaiban, AC-re merőlegesen, az AC egyenes különböző partján az $AD = a$ és a $CE = c$ hosszúságú szakaszokat. B pont végigfut az AC félegyenesen. Legyen $AB = x$.

Ekkor $f(x)$ éppen az ADB és a BCE derékszögű háromszögek átfogóinak összege. E két szakasz összege pedig (a háromszög egyenlőtlenség miatt) B minden helyzetében nagyobb, vagy egyenlő, mint a DE szakasz. Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a B pont éppen az AC és a DE egyenesek metszéspontja. Tehát ekkor minimális a függvényérték. Ezután az ADB és BCE derékszögű háromszögek hasonlóságából kiszámítható x értéke: $a : x = c : (b - x)$, ahonnan $x = \dfrac{ab}{a+c}$.

II. rész

5. *Adjunk meg* 13 *darab pozitív egész számot úgy, hogy a mediánjuk* 2, *az átlaguk* 2000 *legyen. Létezik-e ilyen sokaság, ha azt is megköveteljük, hogy egyetlen módusza legyen, aminek értéke*

a) 1;

b) 2;

c) 1514;

d) 6000?

e) *Mennyi lehet maximum a módusz?* (*14 pont*)

Megoldás. A feltételek szerint a nagyság szerint rendezett minta hetedik eleme 2, az elemek összege $13 \cdot 2000 = 26\,000$.

a) Ha az egyetlen módusz az 1, akkor például kielégíti a feltételeket a következő számsorozat: 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 2; 12 992; 12 992.

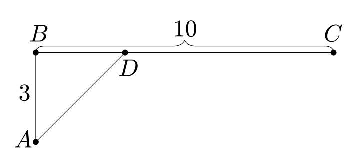
b) Ha az egyetlen módusz a 2, akkor például kielégíti a feltételeket a következő számsorozat: 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 25 976.

c) Ha az egyetlen módusz az 1514, akkor például kielégíti a feltételeket a következő számsorozat: 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 1514; 1514; 1514; 1514; 1514; 18 420.

d) A számok között az 1-es és a 2-es közül legalább az egyikből négy darab van. Ha az egyetlen módusz a 6000, akkor abból legalább ötnek kell lennie, de akkor a számok összege már több, mint 26 000, ami ellentmondás.

e) Nem lehet a számok között hat darab 1-es, mert akkor a keresett szám nem az egyetlen módusz. Öt darab 1-es mellé hat egyforma elem kell, és ennek maximuma biztos kisebb, mint ha csak öt nagy szám kell, és az egyik 1-est 2-esre cseréljük. Ebből következik, hogy az első hét szám összege legalább $4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 10$. Nézzük meg, hogy ezt 26 000-ből kivonva, mi a legnagyobb szám, ami még ötször választható. Ez az 5198. Ekkor azonban a 13. értéknek 0-nak kellene lennie, ami lehetetlen. A maximális módusz tehát az 5197, ami jó is. Pl.: 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 5; 5197; 5197; 5197; 5197; 5197.

6. *Egy gyalogos a hóval borított mező A pontjában van,* 3 *kilométernyire a BC egyenes úttól* (*az* ábrán $AB = 3$ km, $BC = 10$ km).



Az országúton a gyalogos kétszer akkora sebességgel halad, mint a hómezőn. Mely D pontban kell kimennie a gyalogosnak az útra, hogy a legrövidebb idő alatt jusson C-be? (*16 pont*)

Első megoldás (paraméterezés). Legyen $BD = x$, ekkor $DC = 10 - x$, $AD = \sqrt{x^2+9}$.

Ha a gyalogos sebessége a hómezőn v, az országúton $2v$, akkor az ADC utat $t = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{v} + \dfrac{10-x}{2v}$ idő alatt teszi meg. Megkeressük azon t értékeket, amelyekre a $t = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{v} + \dfrac{10-x}{2v}$ egyenletnek van megoldása. (Azt is láthatjuk, hogy a szélsőértékhely meghatározásakor pl. egységnyinek választhatjuk a v sebességet.)

Rendezzük át az egyenletet, emeljük négyzetre és vizsgáljuk meg az így kapott másodfokú paraméteres egyenletet:

$$2\sqrt{x^2+9} = 2t + x - 10,$$
$$4x^2 + 36 = 4t^2 + x^2 + 100 - 40t + 4tx - 20x,$$
$$3x^2 + 4x(5-t) - 4(t^2 - 10t + 16) = 0.$$

Világos, hogy ennek az egyenletnek akkor lehet megoldása, ha diszkriminánsa nemnegatív:

$$D = 16(5-t)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot \left(t^2 - 10t + 16\right) \geq 0,$$
$$4t^2 - 40t + 73 \geq 0,$$
$$4\left(t - 5 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\left(t - 5 + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) \geq 0,$$

s ekkor $t \leq 5 - \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ vagy $t \geq 5 + \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$.

$AC = \sqrt{10^2+9} \approx 10{,}44$. Ha ezt az utat az „országúti” sebességgel tenné meg a gyalogos, akkor is $\dfrac{10{,}44}{2} = 5{,}22$ egységnyi időre lenne szüksége; vagyis a $t \leq 5 - \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ lehetőséget kizárhatjuk. Kaptuk: $t \geq 5 + \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$, vagyis ha a gyalogos sebessége v, akkor legkevesebb

$$\frac{5 + \frac{3}{2}\sqrt{3}}{v}$$

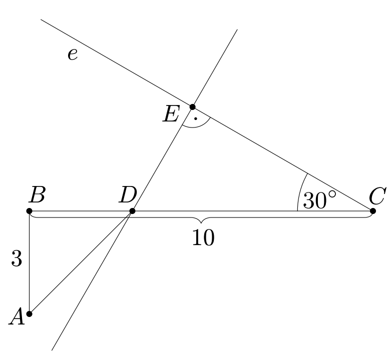
egységnyi idő alatt tudja megtenni az ADC utat.

Ha a $3x^2 + 4x(5-t) - 4\left(t^2 - 10t + 16\right) = 0$ egyenlet diszkriminánsa 0, akkor

$$x = \frac{4(t-5)}{2 \cdot 3} = \sqrt{3}\,.$$

Második megoldás (elemi geometria). Átfogalmazzuk a feladatot: ha a gyalogos sebessége a hómezőn egységnyi, akkor a BC egyenesen olyan D pontot keresünk, amelyre $AD + \dfrac{DC}{2}$ minimális.

Vegyük fel a BC egyenes által meghatározott, A-t nem tartalmazó félsíkjában a C-ből kiinduló e félegyenest úgy, hogy BC-vel bezárt szöge $30°$ legyen, majd bocsássunk D-ből merőlegest erre az egyenesre (a talppontot jelöljük E-vel).

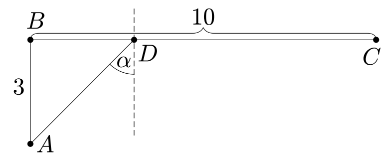


Ekkor $DE = \dfrac{DC}{2}$ (hiszen az EDC derékszögű háromszög egy szabályos háromszög fele), s tetszőleges D pont esetén az $AD + DE$ összeget kell minimalizálnunk, ahol DE merőleges e-re. $AD + DE$ akkor lesz a lehető legkisebb, ha ez a három pont egy egyenesbe esik, vagyis ha $ADB\sphericalangle = 60°$.

Ez az eredmény természetesen ugyanaz, mint az előző megoldásban kapott érték, hiszen

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60° = \frac{AB}{BD} = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

Harmadik megoldás (fizikai szemlélet). Képzeljük el, hogy az A pontba egy fényforrást helyezünk, ahonnan a fény a két közeg határvonalán lévő C pontba jut. Mivel a fény két pont között mindig a minimális ideig tartó úton halad, nekünk a feladatban éppen azt a D pontot kell meghatároznunk, amely mellett a fénysugár beesési szöge a határszöggel egyezik meg, azaz a törési szög 90°.



A geometriai optika Snellius–Descartes-törvénye szerint

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2},$$

ahol α és β a beesési és törési szög, v_1 és v_2 a fény sebessége a két közegben. Ebben az esetben a BAD szög megegyezik a beesési szöggel (váltószögek), tehát

$$\frac{\sin BAD\sphericalangle}{\sin 90^\circ}=\frac{v}{2v}.$$

Innen már megkapjuk a $BAD\sphericalangle=30^\circ$-os eredményt.

Negyedik megoldás (deriválás). A $t=\sqrt{x^2+9}+\dfrac{10-x}{2}$ függvény deriváltja

$$t'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}\cdot 2x-\frac{1}{2},$$

ennek zérushelye:

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}\cdot 2x-\frac{1}{2}=0,$$
$$\sqrt{x^2+9}=2x,$$

s mivel $x>0$, azért $x^2+9=4x^2$, amiből $x=\sqrt{3}$.

Ha $x<\sqrt{3}$, akkor $t'<0$; ha $x>\sqrt{3}$, akkor $t'>0$. Ezért t-nek az $x=\sqrt{3}$ helyen minimuma van.

7. *Egy társaságban öt ember találkozott, jelölje őket A, B, C, D, E. Köztük az ismeretségek kölcsönösek. Megkérdeztük őket, kinek hány ismerőse van ötük között. A azt mondta, négy embert ismer. C-ről kiderült, hogy ugyanannyi ismerőse van, mint D-nek. D azt mondta, hogy eggyel kevesebb ismerőse van, mint E-nek. E ismerőseinek száma páratlan.*

a) Hány embert ismer D?

b) Ismerheti-e egymást B és D?

c) Ismerheti-e egymást C és D? (*16 pont*)

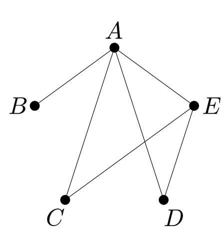
Megoldás. Mivel A négy embert ismer, ő mindenkit ismer. Ez azt is jelenti, hogy mindenki más legalább egy embert ismer, hiszen A-t ismerik.

Ezek szerint D is legalább egy embert ismer. E több embert ismer, mint D és páratlan sokat, tehát hármat ismer. Ebből kiderül, hogy D is és C is 2 embert ismer.

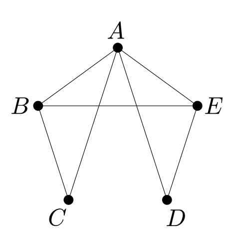
Az ismerősök számáról tehát a következőket tudjuk: A-nak 4, B-nek b, C-nek 2, D-nek 2, E-nek 3. Most megmutatjuk, hogy B-nek 1 vagy 3 ismerőse lehet.

Szemléltessük az ismeretségeket egy rajzon; az embereket jelölje egy-egy pont, és ha ismerik egymást, kössük össze őket. Az összekötő vonalak végpontjainak száma a vonalak számának kétszerese. Ez éppen az egyes emberek ismerősei számának összege. (A gráfok nyelvén: az élek számának kétszerese a fokszámok összege.) Ez utóbbi $4+b+2+2+3=$ (a vonalak számának kétszerese). Ezek szerint b páratlan, tehát 1 vagy 3 lehet.

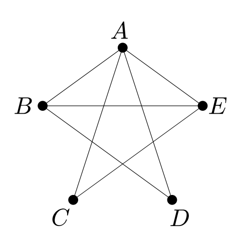
Az ismeretségeket szemléltető gráfok a következők lehetnek:



1. ábra



2. ábra



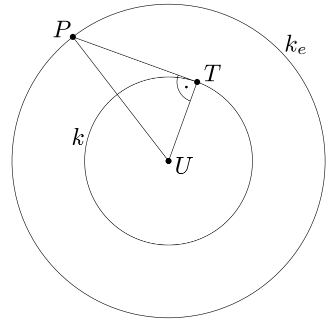
3. ábra

A *3. ábra* mutatja, hogy B és D ismerheti egymást.

Ha C és D ismerné egymást, akkor nekik már nem lehetne további ismerősük, így E csak A-t és B-t ismerhetné és nem lenne 3 ismerőse. Tehát C és D nem ismerik egymást.

8. *Jelölje k az $x^2+y^2-25x-48y+576=0$ egyenletű kört. Határozzuk meg k minden olyan érintő egyenesének egyenletét, amelyre teljesül, hogy az y tengely és a k kör közé eső szakaszának hossza 9,375 egység.* (*16 pont*)

I. megoldás (a szerkesztést követve). Keressük meg ezen érintők y tengellyel vett metszéspontját. Határozzuk meg először azon pontok mértani helyét, amelyekből a k körhöz húzott érintő hossza 9,375 egység. Ennek a mértani helynek az y tengellyel való metszéspontjai lesznek a keresett pontok.



A vizsgált mértani hely egy k-val koncentrikus k_e kör. Valóban, ha a P pontból az U középpontú k körhöz húzott PT érintőszakasz hossza rögzített, PU értéke is állandó, hiszen az UTP derékszögű háromszögben $PU^2=PT^2+TU^2$.

Esetünkben k egyenlete $(x-12{,}5)^2+(y-24)^2=12{,}5^2$ alakba írható át, azaz $U(12{,}5;24)$, $r=TU=12{,}5$, így a $P(x,y)$ pontból k-hoz húzott érintő hossza pontosan akkor 9,375 egység, ha

$$k_e\colon (x-12{,}5)^2+(y-24)^2=9{,}375^2+12{,}5^2.$$

Az y tengely pontjait az $x=0$ feltétel jellemzi, tehát a keresett pontok y koordinátáira

$$(0-12{,}5)^2+(y-24)^2=9{,}375^2+12{,}5^2, \quad \text{amiből} \quad y=24\pm 9{,}375,$$

azaz $P_1(0;33,375)$, $P_2(0;14,625)$.

Ekkor a P_1 ponton átmenő érintő egyenlete

$$y=mx+(24+9{,}375)=mx+24+\frac{75}{8}.$$

Ezt behelyettesítve a k kör egyenletébe:

$$x^2+\left(mx+24+\frac{75}{8}\right)^2-25x-48\left(mx+24+\frac{75}{8}\right)+576=0.$$

Rendezve:

$$(m^2+1)x^2-\left(25-\frac{75}{4}m\right)x+\left(\frac{75}{8}\right)^2=0.$$

Pontosan akkor lesz az egyenes érintő, ha ennek a másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa 0:

$$\left(25-\frac{75}{4}m\right)^2-4(m^2+1)\left(\frac{75}{8}\right)^2=0, \quad \text{amiből} \quad -25\cdot\frac{75}{2}m=4\cdot\frac{75^2}{8^2}-25^2,$$

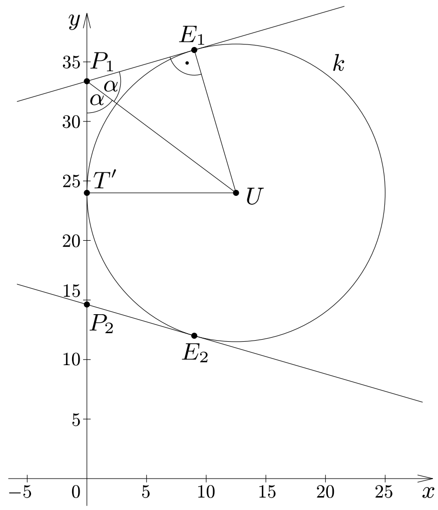
vagyis $m=\dfrac{7}{24}$. Az egyenlet: $y=\dfrac{7}{24}x+24+\dfrac{75}{8}$.

A P_2-n átmenő érintő ennek az $y=24$ egyenesre vonatkozó tükörképe, tehát meredeksége $-\dfrac{7}{24}$, egyenlete pedig $y=-\dfrac{7}{24}x+24-\dfrac{75}{8}$.

II. megoldás (ad hoc). Vegyük észre, hogy a k kör egyenlete

$$(x-12{,}5)^2+(y-24)^2=12{,}5^2,$$

vagyis a kör a $T'(0;24)$ pontban érinti az y tengelyt.



Az y tengely tetszőleges P pontjából a k körhöz húzott $P'T$ érintő hossza az érintő szakaszok egyenlősége révén PT'-vel egyenlő, azaz a keresett pontok:

$$P_{1,2}(0; 24 \pm 9{,}375).$$

Mivel $9{,}375 < 12{,}5$, ezért a P_1 pontból húzott érintő meredeksége pozitív, a P_2 pontból húzottté pedig negatív.

Legyen $T'P_1U\sphericalangle = \alpha$, ekkor $E_1P_1U\sphericalangle = \alpha$ és $T'P_1E_1\sphericalangle = 2\alpha$, valamint

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{12{,}5}{\frac{75}{8}} = \frac{\frac{25}{2}}{\frac{75}{8}} = \frac{4}{3}.$$

A P_1-ből húzott érintő m meredekségére:

$$m = \operatorname{tg}(2\alpha - 90°) = \operatorname{tg}\big(\alpha + (\alpha - 90°)\big) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\alpha - 90°)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha - 90°)} =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{2} = \frac{7}{24}.$$

(Felhasználtuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(-\alpha)$ és $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.)

Tehát (a szimmetria miatt) két érintő van, amely teljesíti a feltételt:

$$y = \frac{7}{24}x + 24 + \frac{75}{8} \qquad \text{és} \qquad y = -\frac{7}{24}x + 24 - \frac{75}{8}.$$

9. *Három egymás utáni pozitív egész szám szorzatának prímtényezős felbontásában csak két különböző prímszám szerepel (tehát a szorzat p^nq^m alakú, ahol p és q prímszám, n, m pozitív egészek). Adjuk meg az összes ilyen számhármast.* (*16 pont*)

I. megoldás. A középső szám nagyobb 1-nél, tehát felbontásában szerepel legalább egy prímtényező.

A középső szám mindkét szomszédjához relatív prím, ezért a benne szereplő prímtényező a másik két számban nem szerepelhet, e két számban tehát összesen csak egy prímtényező szerepelhet.

Viszont e két számnak csak a 2 lehet közös osztója, mert különbségük 2. Ez kétféleképp lehetséges: vagy az első szám 1, vagy mindkét szám 2-hatvány.

Az első esetben az 1, 2, 3 számokat kapjuk.

A második esetben két 2-hatvány különbsége 2, ez csak úgy lehet, ha a két szám a 2 és a 4, így a 2, 3, 4 számokat kapjuk.

A feladat feltételének két számhármas felel meg: 1, 2, 3 és 2, 3, 4.

II. megoldás. Két szomszédos szám között van egy páros, tehát a három szám szorzata páros. Így az egyik prím a 2, a másik egy páratlan prím. Legyen ez p.

Ha a középső szám páros, akkor a két szélső páratlan. Nem lehet mindkettő osztható p-vel, mert p nagyobb kettőnél. Tehát az egyik szám az 1, és mivel csak az első szám lehet 1, azért a három szám az 1, 2, 3.

Ha a középső szám páratlan, akkor a két szélső páros, és mindkettő relatív prím a középsőhöz, ezért egyik sem osztható p-vel. De akkor mindkettő kettőhatvány. A kettőhatványok sorában: 1, 2, 4, 8, … . Csak egy esetben 2 a különbség két (nem feltétlenül szomszédos) szám között: a 2 és a 4 esetében. Tehát a három szám a 2, 3, 4.

A feladatnak tehát két számhármas tesz eleget: 1, 2, 3 és 2, 3, 4.