## 1. Bevezetés

Bár a konvex geometriának, a geometriának a konvex testekkel és síkidomokkal foglalkozó ágának gyökerei Euklidészhez és Arkhimédészhez nyúlnak vissza, a konvex testek szisztematikus vizsgálata a 20. század elején kezdődött Hermann Brunn és Hermann Minkowski munkásságával. Azóta ez a tudományág nagy jelentőségre tett szert, és a természettudományok számos ágában alkalmazásra került. A cikk célja ezen relatíve fiatal tudományterület egy ismert problémájának bemutatása.

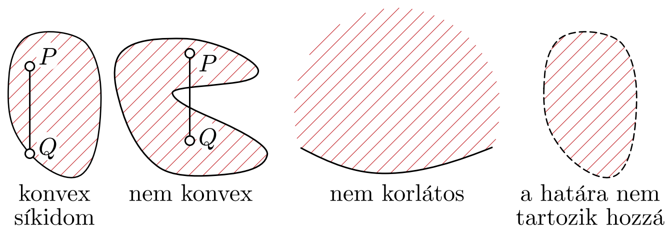
Ehhez először definiáljuk a szükséges alapfogalmakat.

**1. definíció.** A $K$ síkbeli halmazt *konvex síkidomnak* vagy *konvex lemeznek* nevezzük, ha

(1) $K$ bármely két pontját összekötő szakasz is $K$-hoz tartozik (minden pontjából belátjuk az egész alakzatot);

(2) $K$ korlátos (belerakható pl. egy nagy körbe);

(3) $K$ határa, mely egy zárt, folytonos, önmagát nem metsző görbe, is $K$-hoz tartozik.




Hasonlóan lehet definiálni a konvex test fogalmát is, magasabb dimenzióban. A fenti fogalom gyengébb változataira is szükségünk lesz. Amennyiben az (1)-es tulajdonság helyett azt követeljük meg, hogy $K$-nak *van olyan* pontja, melyet $K$ bármely másik pontjával összekötő szakasz $K$-hoz tartozik, azt mondjuk, hogy $K$ egy *csillagszerű tartomány.* Ezt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy $K$-nak legalább egy pontjából belátni $K$-t. Ha elhagyjuk az (1)-es, de megtartjuk a másik két tulajdonságot, azt mondjuk, $K$ egy *topologikus lemez,* vagy egyszerűen *lemez* vagy *síkidom.*

Minden lemezre, így csillagszerű vagy konvex lemezre is érvényes az alábbi észrevétel.

**1. megjegyzés.** Legyen $S$ egy lemez. Ekkor minden egyenesnek pontosan két eltoltja van, ami $S$-et érinti.

Szükségünk lesz még az alábbi fogalomra.

**2. definíció.** Az $A$ és $B$ síkbeli halmazok *vektorösszege* vagy *Minkowski-összege* azon $A + B$ halmaz, melynek elemei az összes $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ alakban felírható helyvektorú pontok halmaza, ahol $\overrightarrow{a}$ egy $A$-beli, és $\overrightarrow{b}$ egy $B$-beli pont helyvektora. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor a $\lambda A$ halmaz azon pontok összessége, melyek helyvektorai felírhatók $\lambda\overrightarrow{a}$ alakban, ahol $\overrightarrow{a}$ egy $A$-beli pont helyvektora.

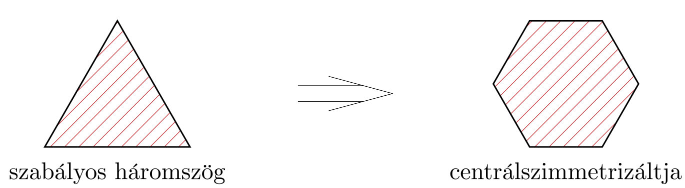
Pongyolán fogalmazva, ha azonosnak tekintenénk a pontokat és a helyvektoraikat, akkor $A + B$ az összes $A$-beli pont és az összes $B$-beli pont összege, minden lehetséges párosításban. Így pl. két szakasz vektorösszege egy velük párhuzamos szakasz, ha párhuzamosak, ellenkező esetben pedig egy parallelogramma.

**3. definíció.** A $K$ konvex síkidom *centrálszimmetrizáltjának* az

$$\frac{1}{2}\big(K + (-K)\big) = \frac{1}{2}(K - K)$$

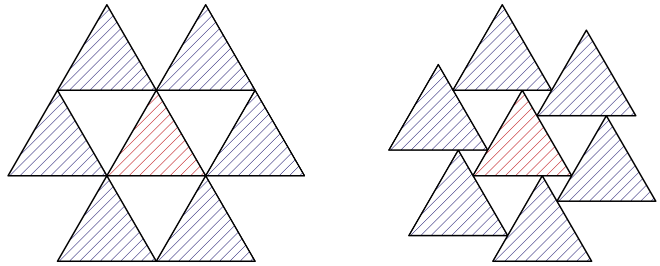
halmazt nevezzük.

Könnyen látható, hogy minden konvex síkidom centrálszimmetrizáltja egy origóra szimmetrikus konvex síkidom.




Írásunk fő tárgya a Hugo Hadwigertől [6] származó alábbi fogalom, mely hasonlóan értelmezhető konvex testekre, illetve általában (topologikus) lemezekre.

**4. definíció.** Egy $K$ konvex síkidom *eltolt érintési száma/csókszáma/Hadwiger-száma* azon eltoltjainak maximális száma, melyek az eredeti alakzatot érintik, és nincs közös belső pontjuk (nem fedik át egymást). Jele: $H(K)$.



Háromszög Hadwiger-száma

A cikkben ismertett fő eredmény az alábbi tétel [6].

**1. tétel** (Hadwiger, 1957)**.** *Minden $K$ konvex síkidom Hadwiger-számára igaz az alábbi egyenlőtlenség:* $6 \le H(K) \le 8$.

Az előbbi példában láthattuk, hogy háromszöget hat eltoltjával tudunk érinteni. Meggondolható az is, hogy parallelogramma esetében nyolc eltoltját is köré tudjuk pakolni. A következő részben Hadwiger tételét igazoljuk.

## 2. Hadwiger tételének bizonyítása

Legyen $K$ egy konvex síkidom, és jelölje $K$ eltoltját az $\overrightarrow{x}$ vektorral $\overrightarrow{x} + K$. Az első eszköz, amihez a bizonyításhoz szükségünk lesz, Minkowski [10] egy eredménye.

**1. lemma** (Minkowski, 1904)**.** *Legyen $K$ centrálszimmetrizáltja $M$. Ekkor tetszőleges $\overrightarrow{x}$ és $\overrightarrow{y}$ vektorokra $\overrightarrow{x} + K$ és $\overrightarrow{y} + K$ pontosan akkor fednek át/érintik egymást/nincs közös pontjuk, ha $\overrightarrow{x} + M$ és $\overrightarrow{y} + M$ átfednek/érintik egymást/nincs közös pontjuk.*

**Bizonyítás.** Először belátjuk, hogy $\overrightarrow{x} + K$ és $\overrightarrow{y} + K$ pontosan akkor metszi egymást, ha $\overrightarrow{x} + M$ és $\overrightarrow{y} + M$ is. Vegyük észre, hogy az alábbi tulajdonságok ekvivalensek.

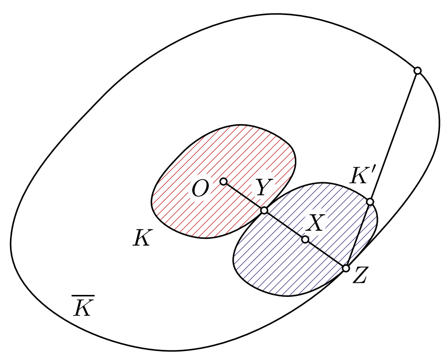
- $(\overrightarrow{x} + M) \cap (\overrightarrow{y} + M) \neq \emptyset$.
- Léteznek $P'_x, P'_y, P''_x, P''_y \in K$ pontok, melyek helyvektoraira
$$\overrightarrow{x} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{p}'_x - \overrightarrow{p}''_x) = \overrightarrow{y} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{p}'_y - \overrightarrow{p}''_y).$$
- Léteznek $P'_x, P'_y, P''_x, P''_y \in K$ pontok, melyek helyvektoraira
$$\overrightarrow{x} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{p}'_x + \overrightarrow{p}''_y) = \overrightarrow{y} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{p}'_y + \overrightarrow{p}''_x).$$
- léteznek $P_x, P_y \in K$ pontok, melyekre $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{p}_x = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{p}_y$.
- $(\overrightarrow{x} + K) \cap (\overrightarrow{y} + K) \neq \emptyset$.

Hasonló ekvivalencia igazolható, ha a $K$ és $M$ halmazok helyett $K$ és $M$ belsejét írunk. Ebből az állítás viszont már következik. □

Vegyük észre, hogy a lemma alapján tetszőleges $K$ konvex síkidom és $M$ centrálszimmetrizáltjának Hadwiger-száma egyenlő. Így Hadwiger tételét elég középpontosan szimmetrikus konvex síkidomokra igazolni. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $K$ középpontja az $O$ origó.

**Első állítás:** $H(K) \le 8$**.**
Legyen $K'$ a $K$ olyan eltoltja, amely érinti $K$-t; jelölje a középpontját $X$. Legyen $Y$ az $OX$ szakasz felezőpontja. Belátjuk, hogy $Y$ közös pontja $K$-nak és $K'$-nek.

Mivel $K$ és $K'$ érintik egymást, van egy közös $P$ pontjuk. De $K$ szimmetrikus $O$-ra, így $K$ és $K'$ helyet cserél, ha $Y$-ra tükrözzük őket. Tehát $P$-nek az $Y$-ra vett $P'$ tükörképe is közös pont. De $K$ és $K'$ konvex, így a $PP'$ szakasz minden pontja közös pont, azaz $Y$ is. Hosszabbítsuk meg most az $OX$ szakaszt $X$ irányában, míg metszi $K'$ határát, és jelöljük a kapott metszéspontot $Z$-vel. Minthogy $K'$ szimmetrikus $X$-re, $\overline{OY} = \overline{YX} = \overline{XZ} = \frac{1}{3}\overline{OZ}$. Jelölje $K'$-nek a $Z$-ből háromszorosára nagyított képét $\bar{K}$. Mivel $K'$ konvex, $K' \subset \bar{K}$. Másrészt $\bar{K}$ középpontja $O$, így $\bar{K}$ a $K$-nak az $O$-ból háromszorosára nagyított képe. Tehát beláttuk, hogy $K$ minden $K$-t érintő eltoltja benne van $K$-nak az $O$ pontból háromszorosára nagyított képében.




Könnyű meggondolni, hogy a nagyított kép területe $T(\bar{K}) = 3^2T(K) = 9T(K)$. Ha $K$-t $n = H(K)$ darab eltoltja érinti úgy, hogy nem fednek át, akkor $\bar{K}$ tartalmazza $K$ $(n+1)$ darab eltoltját, melyek nem fednek át. Ezek összterülete $(n+1)T(K)$. Tehát $(n+1)T(K) \leq 9T(K)$, amiből $n \leq 8$.

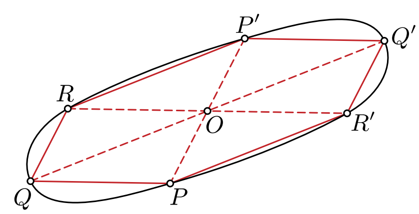
**Második állítás:** $H(K) \geq 6$**.**

A bizonyításhoz az alábbi definícióra lesz szükségünk.

**5. definíció.** Egy középpontosan szimmetrikus hatszög *affin-szabályos,* ha a három, szemközti csúcsait összekötő átlója hat egybevágó háromszögre bontja.

Ennek megfelelően affin-szabályos hatszöget gyártani is tudunk: ha egy tetszőleges háromszöget tükrözünk valamelyik oldalfelező pontjára, majd folytatjuk a tükrözést úgy, hogy az eredeti háromszög valamelyik csúcsa mindegyik tükörképéhez hozzátartozzon, öt tükrözés után egy affin-szabályos hatszöget kapunk.

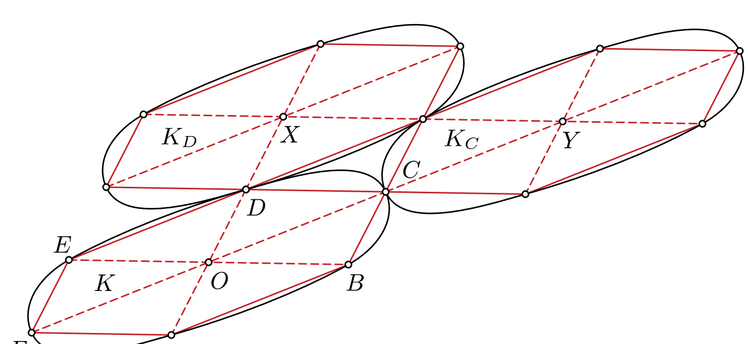
Először belátjuk, hogy $K$ tetszőleges $P$ határpontjához található olyan $K$-ba írt affin-szabályos hatszög, melynek $P$ az egyik csúcsa. Legyen $P'$ a $P$-nek az $O$-ra vett tükörképe. Ekkor $\overline{OP} = \overline{OP'}$. Toljuk el $P$ és $P'$ egyenesét valamelyik irányban párhuzamosan úgy, hogy az eltolt $K$-t egy $\frac{1}{2}\overline{PP'}$ hosszú szakaszban metszi. Ezen szakasz végpontjait $Q$-val és $R$-rel jelöljük oly módon, hogy $K$ határán körbemenve $P$, $Q$, $R$ és $P'$ ebben a sorrendben következnek. Tükrözzük a $Q$ és $R$ pontokat $O$-ra. Az így kapott, $K$ határában levő pontokat jelöljük $Q'$-vel és $R'$-vel.




Megmutatjuk, hogy a $PQRP'Q'R'$ hatszög affin szabályos. Valóban, a hatszög szemközti csúcsait összekötő átlók az $O$ pontban metszik egymást. Másrészt a tükrözés tulajdonságai miatt a szemközti háromszögek egybevágók. Mivel $\overline{OP} = \overline{QR}$ és $RQO\sphericalangle = QOP\sphericalangle$, így az $OQR\triangle$ és az $OPQ\triangle$ egybevágó. Hasonlóan látható be a többi háromszög egybevágósága is.

Most megkonstruáljuk $K$-nak hat eltoltját, melyek nem fednek át, de $K$-t érintik. Legyen $ABCDEF$ egy $K$-ba írt affin-szabályos hatszög. Toljuk el $K$-t az $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{FC}$ vektorokkal. Belátjuk, hogy a hat eltolt érinti $K$-t és nem fednek át, melyből az igazolni kívánt egyenlőtlenség már következik.

Tekintsük most $K$-t, és például az $\overrightarrow{AD}$ vektorral vett $K_D$ eltoltját. Legyen az $e$ egyenes $K$ egy érintője a $D$ pontban. Vegyük észre, hogy $D$ közös pontja $K$-nak és $K_D$-nek. Mivel a két síkidom középpontosan szimmetrikus, így őket $D$-re tükrözve a középpontjaik és ők is helyet cserélnek. Minthogy $e$ helyben marad a tükrözés során, ezért $e$ elválasztja $K$-t és $K_D$-t. De $D$ közös pontja a két síkidomnak, így $K$ és $K_D$ érintik egymást. Ugyanezzel a gondolatmenettel igazolható, hogy mind a hat eltolt érinti $K$-t.



Legyen most $K$ eltoltja $\overrightarrow{FC}$-vel $K_C$. Legyen $K_D$ középpontja $X$ és $K_C$ középpontja $Y$. Könnyen látható, hogy $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EB}$, és $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{XY}$. Így $K_C$ a $K_D$ eltoltja az $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{EB}$ vektorral. Minthogy az előző bekezdés gondolatmenete alapján $K$ és $\overrightarrow{EB}$-vel vett eltoltja érintik egymást, így $K_C$ és $K_D$ is érinti egymást. Hasonlóan látható be, hogy minden eltolt érinti a két szomszédját.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

## 3. További eredmények

Hadwiger eredményét Branko Grünbaum [5] fejlesztette tovább az alábbi formában.

**2. tétel** (Grünbaum, 1961). *Legyen $K$ egy konvex síkidom.*

(1) *Ha $K$ egy parallelogramma, $H(K) = 8$.*

(2) *Ha $K$ nem parallelogramma, $H(K) = 6$.*

De mi a helyzet, ha $K$ nem feltétlenül konvex? Wlodzimierz és Krystyna Kuperberg, valamint Bezdek András [2] fogalmazta meg a következő kérdést, illetve sejtést.

**1. kérdés** (Bezdek–Kuperberg–Kuperberg, 1995). *Igaz-e, hogy tetszőleges lemez Hadwiger-száma legfeljebb* 8*? Ha nem, van olyan szám, melyre* 8*-at kicserélve igaz marad az állítás?*

**1. sejtés** (Bezdek–Kuperberg–Kuperberg, 1995). *Tetszőleges csillagszerű lemez Hadwiger-száma legfeljebb* 8.

A fenti kérdésre Gottfried Cheong és Mira Lee [4] adott választ 2007-ben, akik megmutatták, hogy tetszőleges $n$ pozitív egész esetén található olyan $K_n$ lemez, melyre $H(K_n) \geq n$. A sejtést érintő első eredmény Bezdek Andráshoz kötődik [1], aki 1997-ben megmutatta, hogy ha $S$ egy csillagszerű lemez, akkor $H(S) \leq 75$. Lángi [8] 2009-ben igazolta, hogy ha $S$ középpontosan szimmetrikus, akkor $H(S) \leq 12$. A módszerét alkalmazva született meg 2011-ben a $H(S) \leq 35$ becslés tetszőleges $S$ csillagszerű lemez esetén [9]. Ezen erőfeszítések ellenére a Bezdek-Kuperberg-Kuperberg sejtés még ma is nyitott.

Természetesen konvex síkidomok helyett vizsgálhatunk konvex testeket is. A síkidomok Hadwiger-számára vonatkozó felső becslés átültethető konvex testekre is. Ez alapján Hadwiger belátta, hogy minden $n$-dimenziós $K$ konvex testre $H(K) \leq 3^n - 1$, azaz speciálisan háromdimenziós testek esetén $H(K) \leq 26$. Azt a régóta ismert alsó becslést, hogy $n$-dimenziós konvex testek Hadwiger száma legalább $n(n+1)$, Talata István [11] javította azzal 1998-ban, hogy igazolta, hogy létezik olyan $a > 1$ konstans, hogy minden $n$-dimenziós $K$ konvex testre $H(K) \geq a^n$.

Minthogy Minkowski lemmája alapján minden konvex test Hadwiger-száma megegyezik a centrálszimmetrizáltjának Hadwiger számával, felvetődhet bennünk, hogy igaz-e, hogy minden konvex test Hadwiger-száma páros. Ezt a kérdést, sejtés formájában, Grünbaum fogalmazta meg 1961-ben. A sejtést Talata István, majd később Joós Antal [7] cáfolta: olyan 3-dimenziós konvex testet konstruáltak, melynek Hadwiger-száma 17, illetve 15. Talata István igazolta azt is, hogy minden 12 és 26 közti páros szám előáll, mint egy 3-dimenziós konvex test Hadwiger-száma. Poór Attila és Talata István bizonyította, hogy ha $h(n)$ jelöli a Hadwiger-számok halmazának minimumát az $n$-dimenziós konvex testekre nézve, akkor tetszőleges $h(n) \leq m \leq 3^n - 2$ esetén $H(K) = m$ vagy $H(K) = m + 1$ alkalmas $K$ $n$-dimenziós konvex testre.

Jelenleg is számos Hadwiger-számokkal kapcsolatos kérdés nyitott. Ezekről az érdeklődő olvasó Brass, Moser és Pach könyvéből [3] tájékozódhat.

## Hivatkozások


[1] A. Bezdek, *On the Hadwiger number of a starlike disk,* in: Intuitive Geometry (Budapest 1995), Bolyai Soc. Math. Studies, **6** (1997), 237–245.

[2] A. Bezdek, K. Kuperberg and W. Kuperberg, *Mutually contiguous translates of a plane disk,* Duke Math. J., **78** (1995), 19–31.

[3] P. Brass, W. Moser and J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry,* Springer, New York, 2005.

[4] O. Cheong and M. Lee, *The Hadwiger number of Jordan regions is unbounded,* Discrete Comput. Geom., **37** (2007), 497–501.

[5] B. Grünbaum, *On a conjecture of Hadwiger,* Pacific J. Math., **11** (1961), 215–219.

[6] H. Hadwiger, *Über Treffanzahlen be translationsgleichen Eikörpern,* Arch. Math., **8** (1957), 212–213.

[7] A. Joós, *On a convex body with odd Hadwiger number,* Acta Math. Hungar., **119** (2008), 307–321.

[8] Z. Lángi, *On the Hadwiger numbers of centrally symmetric starlike disks,* Beiträge Algebra Geom., **50** (2009), 249–257.

[9] Z. Lángi, *On the Hadwiger numbers of starlike disks*, European J. Comb., **32** (2011), 1203–1211.

[10] H. Minkowski, *Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper,* Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse (1904), 311–355.

[11] I. Talata, *Exponential lower bound for the translative kissing numbers of* $d$*-dimensional convex bodies,* Discrete Comput. Geom., **19** (1998), 447–455.