I. rész

1. *Egy* 18 *fős csoportban a fizika tantárgy átlaga két tizedesre kerekítve* 3,72 *volt. Tudjuk, hogy senki sem bukott meg.*

a) Legfeljebb hányan kaphattak kettest?

b) Biztos-e, hogy volt valakinek ötöse?

c) Az osztály másik csoportjába 16 *diák jár, akik fizika átlaga* 4,12 *volt. Mekkora az osztály átlaga fizikából?* (*13 pont*)

Megoldás. *a*) Határozzuk meg a kapott jegyek összegét. Tudjuk, hogy az átlag két tizedesre van kerekítve, így legalább 3,715 kell hogy legyen, és kisebb, mint 3,725. Vagyis az osztályzatok összege, amit jelöljünk X-szel, így kapható meg:

$$3{,}715 \cdot 18 \le X \le 3{,}725 \cdot 18,$$
$$66{,}87 \le X \le 67{,}05.$$

Az X értéke csak egész szám lehet, így $X = 67$.

Jelöljük az egyes osztályzatok számát sorra az O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 szimbólumokkal. Mivel senki sem bukott meg, így $O_1 = 0$. Keressük a kettesek számának lehetséges maximumát.

Ha O_2 db kettes van az osztályzatok között, akkor a maradék $(18-O_2)$ db osztályzat összege maximum $67-(2\cdot O_2)$ lehet. Azonban ezen osztályzatok átlaga nem lehet nagyobb 5-nél:

$$\frac{67 - 2 \cdot O_2}{18 - O_2} \le 5.$$

Rendezve: $3 \cdot O_2 \le 23$, amiből $O_2 \le 7{,}6\dot{6}$ adódik.

Tehát a kettes osztályzatok maximális száma 7 lehet. Ilyen eset lehetséges is: ha 7 db 2-es, 2 db 4-es és 9 db 5-ös osztályzat van.

b) Keressünk olyan példát, ha lehetséges, ahol nincs az osztályzatok között ötös és minden, a feladatban szereplő feltételnek megfelel.

Legyen tehát $O_5 = 0$. Az osztály 3,72-es átlagát próbáljuk meg csak 3-as és 4-es osztályzatok segítségével elérni. A felírható egyenletrendszer a következő:

$$O_3 \cdot 3 + O_4 \cdot 4 = 67, \tag{1}$$
$$O_3 + O_4 = 18. \tag{2}$$

Szorozzuk meg a (2) egyenletet 3-al és a kapott egyenletet vonjuk ki az (1) egyenletből: $O_4 = 13$. Behelyettesítve a (2) egyenletbe, kapjuk, hogy $O_3 = 5$.

Nem biztos, hogy van ötös osztályzat, mert ha 13 db 4-es és 5 db 3-as jegyet kaptak a diákok a csoportban, akkor is 3,72 lesz az átlaguk.

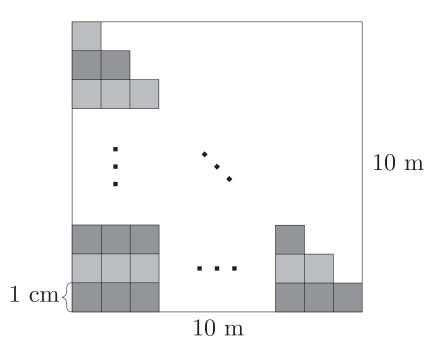
c)

$$\frac{18 \cdot 3{,}72 + 16 \cdot 4{,}12}{18 + 16} = 3{,}908.$$

Az osztály fizika átlaga: 3,91.

2. *Egy irodaház egyik oldalfalának díszítésére pályázatot írtak ki. Az oldalfal alakja* 10 m *oldalhosszúságú négyzet.*

A győztes pályázó 1 cm *oldalhosszúságú, négyzet alakú, piros, illetve kék színű kerámia lapocskákból rakott ki hézagmentesen egy mintát az* ábra *szerint úgy, hogy a talaj szintjén kezdődő legalsó sort teljesen kitöltötte a lapocskákkal. Ha felfelé haladunk, minden egyes rákövetkező sorba eggyel kevesebb lapocska került. Minden sorba csak azonos színű lapocskák kerültek, és az egymással érintkező sorok különböző színűek voltak.*



Vannak-e ennek a kerámia mintának olyan, legalább 10 *sormagasságú részei, részmintái, melyek közvetlenül egymás alatt lévő, teljes sorokból állnak, a bennük lévő lapocskák száma* 2016, *valamint az alsó és felső sora azonos színű? Ha igen, adjuk meg, hogy felülről számítva hányadik sornál kezdődnek, és hány sor tartozik hozzájuk.* (*11 pont*)

Megoldás. A feladat megfogalmazható úgy is, hogy az 1 és 1000 között lévő egészek közül (megengedhető az 1 és az 1000 is) kiválasztható-e páratlan sok, egymást közvetlenül követő szám úgy, hogy az összegük 2016 legyen. Jelöljük a legkisebb számot z-vel (felülről számolva ettől a sortól indulunk, ez a részminta legrövidebb sorának a hossza), az elemek számát pedig k-val (ez a részmintában a sorok száma, a sormagasság). (A feltételekből: $z, k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq z, k \leq 1000$ és k páratlan.)

A keresett összeg a bevezetett jelölésekkel a következő:

$$z + (z+1) + (z+2) + \ldots + (z+k-3) + (z+k-2) + (z+k-1) = 2016.$$

A zárójelek felbontása és az összegzések után (felhasználva a számtani sorozat összegképletét is) a következő kétismeretlenes egyenletet kell megoldani:

$$zk + \frac{k}{2}(k-1) = 2016.$$

Az egyenlet mindkét oldalát 2-vel szorozva, majd a bal oldalt szorzattá alakítva a következőt kapjuk:

$$k(2z+k-1) = 4032.$$

Mivel $4032 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$, és a feltételek miatt a szorzat első tényezője biztosan páratlan, a második tényezője biztosan páros, így a tényezők értékeire a következő lehetőségek adódnak:

k	$2z+k-1$
63	64
21	192
9	448
7	576
3	1344
1	4032

A *„legalább 10 sormagasságú részei”* miatt csak az első két sorhoz tartozó egyenletrendszereket kell megoldani. A következő megoldásokat kapjuk:

k	z
63	1
21	86

Így összesen két rész, részminta felel meg a feltételeknek:

1. Felülről az 1. sortól kezdődik, és 63, közvetlen egymás alatt lévő sort tartalmaz.
2. Felülről a 86. sortól kezdődik, és 21, közvetlen egymás alatt lévő sort tartalmaz.

3. *Az ABC háromszög két csúcsának koordinátái: $A(3;-2)$ és $B(3;6)$. Az A csúcsnál lévő α szög felezője a BC oldalt az $F_\alpha\left(\frac{8+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}};6\right)$ pontban metszi.*

Határozzuk meg a C csúcs koordinátáinak pontos értékét.

b) Legyen az ABP háromszög olyan, hogy az A és B csúcs egyezzen meg az a)-beli A és B ponttal, és oldalai mérőszámának négyzetösszege egyezzen meg területe mérőszámának hétszeresével.

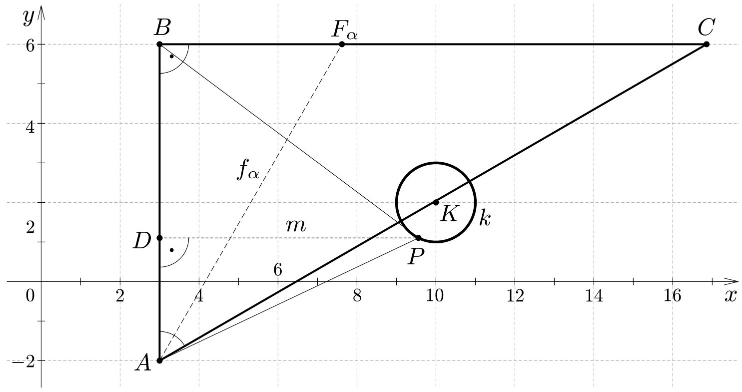
Határozzuk meg a feltételnek megfelelő P pontok mértani helyét, ha tudjuk, hogy a P pont abszcisszája nagyobb a másik két csúcs abszcisszájánál. (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Az A és a B pont első koordinátája megegyezik, ezért AB párhuzamos az y tengellyel. Az F_α és a B pont ordinátája szintén megegyezik, ezért BC párhuzamos az x tengellyel, így a B csúcsnál derékszög van.

Az AB oldal hossza 8, a BF_α hossza $\frac{8}{\sqrt{3}}$. Az ABF_α derékszögű háromszögben lévő $\frac{\alpha}{2}$ szögre:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}}}{8} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

így $\alpha = 60°$ és az $ABC_\triangle$ egy szabályos háromszög fele, tehát $AC = 16$. A szögfelező tétel miatt $\frac{F_\alpha C}{F_\alpha B} = \frac{16}{8} = 2$, amiből $F_\alpha C = \frac{16}{\sqrt{3}}$, és így $C\left(3 + \frac{24}{\sqrt{3}};6\right)$ következik.



b) Legyen $P(x;y)$. A keresett P pont az AB egyenes jobb oldalán van ($x>3$). Az AB oldalhoz tartozó magasság $x-3$. A háromszög területe: $T=\dfrac{8(x-3)}{2}$. A feltételnek megfelelően: $7\cdot T=AB^2+BP^2+AP^2$. Ezekből felírható:

$$64+(x-3)^2+(y-6)^2+(x-3)^2+(y+2)^2=28(x-3).$$

A műveleteket elvégezve, majd az egyenletet rendezve: $(x-10)^2+(y-2)^2=1$. A kapott egyenlet egy $(10;2)$ középpontú, 1 egység sugarú kör egyenlete. A kör minden pontja megfelel a feltételeknek, így ez a kör a keresett mértani hely.

4. a) *Legyen az* $\{a_n\}$ *sorozat első tagja* 1, *a második tagja pedig* 2. *A sorozat elemeit a harmadik tagtól kezdve a következő képzési szabály (rekurzió) adja meg:*

$$a_{n+2}:=\frac{a_{n+1}+1}{a_n},\quad ha\ \ n\geq 1.$$

Határozzuk meg a számsorozat 2016. *elemét.*

b) *A Heuréka Alapítvány támogatni szeretné a matematikából tehetséges diákokat. Ennek érdekében a támogatók által adományozott pénzt* 2016. *január* 1-*jén évi* 3,2%-*os, állandó kamatozású folyószámlán helyezte el. A pénzintézet minden év utolsó napján írja jóvá a kamatokat, az alapítvány pedig az első év lejártától kezdve minden év január* 1-*jén utalja a támogatást a fiataloknak. Az évente nyújtott támogatás összege mindig az első év végén kamatként kapott összeg két és félszerese.*

Mikor tud az alapítvány utoljára a szabályzatában lefektetett módon teljes támogatást fizetni, ha nincsenek egyéb bevételei és kiadásai sem? (*13 pont*)

Megoldás. a) Számítsunk ki néhány tagot:

$$a_1=1,\quad a_2=2,\quad a_3=\frac{a_2+1}{a_1}=\frac{2+1}{1}=3,\quad a_4=\frac{a_3+1}{a_2}=\frac{3+1}{2}=2,$$
$$a_5=\frac{a_4+1}{a_3}=\frac{2+1}{3}=1,\quad a_6=\frac{a_5+1}{a_4}=\frac{1+1}{2}=1,\quad a_7=\frac{a_6+1}{a_5}=\frac{1+1}{1}=2,$$
$$a_8=\frac{a_7+1}{a_6}=\frac{2+1}{1}=3,\quad a_9=\frac{a_8+1}{a_7}=\frac{3+1}{2}=2,\quad a_{10}=\frac{a_9+1}{a_8}=\frac{2+1}{3}=1,\ \ldots.$$

Mivel $a_6=a_1$, $a_7=a_2$, $a_8=a_3$, $a_9=a_4$ és $a_{10}=a_5$, így az értékek periodikusak, hiszen a műveletek (a rekurzió miatt) 5 tagonként ugyanazok lesznek ugyanazokkal a számokkal, a periódus hossza így 5.

A 2016-nak az 5-ös maradéka 1, tehát a 2016. tag 1.

b) Jelölések:
alaptőke: a_0; kamat: $p=3{,}2\%$/év; kivét minden évben: $0{,}08a_0$.

Az n. kifizetés utáni tőke:

$$\begin{aligned}
&a_1=1{,}032a_0-0{,}08a_0,\\
&a_2=(1{,}032a_0-0{,}08a_0)\cdot 1{,}032-0{,}08a_0=1{,}032^2a_0-0{,}08\cdot 1{,}032a_0-0{,}08a_0,\\
&\quad\ldots\\
&a_n=1{,}032^na_0-1{,}032^{n-1}\cdot 0{,}08a_0-1{,}032^{n-2}\cdot 0{,}08a_0-\ldots-0{,}08a_0=\\
&\quad=a_0\big[1{,}032^n-0{,}08(1{,}032^{n-1}+\ldots+1)\big]=a_0\left(1{,}032^n-0{,}08\cdot\frac{1{,}032^n-1}{0{,}032}\right)=0.
\end{aligned}$$

Mivel $a_0\neq 0$, ezért ebből

$$1{,}032^n-\frac{0{,}08}{0{,}032}\cdot 1{,}032^n+\frac{0{,}08}{0{,}032}=0,\quad \text{majd}\quad 1{,}032^n=1\,\frac{2}{3}$$

következik. Ebből pedig

$$n=\frac{\lg\left(1\,\frac{2}{3}\right)}{\lg 1{,}032}\approx 16{,}217.$$

Ennek megfelelően az alapítvány 16-szor tud teljes támogatást fizetni, vagyis utoljára 2032. január 1-jén.

II. rész

5. *a) Egy hegység öt leglátogatottabb csúcsán van egy-egy kilátó. Minden kilátóból bármelyik kilátóba közvetlenül eljuthatunk libegővel vagy gyalog, de mindig csak az egyik módon. András, a helyszínt nem ismerve azt állította, hogy lehet olyan, mindegyik kilátót érintő kirándulást szervezni, amelyen csak az egyik módon közlekedünk.*

Igaza van Andrásnak?

b) Az A városból 60 km/h *sebességgel indul el egy személyvonat a B városba. A személyvonat után indul valamivel később egy gyorsvonat ugyanezen az útvonalon, másfélszeres sebességgel. A gyorsvonat így a személyvonatot éppen a B városban érné utol. Sajnos a személyvonat műszaki hiba miatt útjának kétharmad részétől csak az eredeti sebességének felével tud haladni, így a két vonat már a B város előtt* 45 km*-re lévő C város pályaudvarán találkozik.*

Milyen messze van C város az A várostól, ha a vonatok sebességét az egyes szakaszokon állandónak tekintjük? (*16 pont*)

Megoldás. *a)* Legyenek a gráf csúcsai a kilátók, élei pedig az útvonalak. Színezzük ki az éleket. A „libegős” él fekete, a „gyalogos” él pedig zöld legyen. A szöveg szerint bármely két kilátó össze van kötve, ezért egy teljes gráfot kapunk. Tehát a fekete élek által meghatározott részgráfnak komplementere a zöld élek által meghatározott részgráf.

Mivel egy gráf és komplementere közül legalább az egyik összefüggő, ezért Andrásnak igaza van.

b) Jelölések: $v_{\text{sz}}=60$ km/h; $v_{\text{gy}}=1{,}5v_{\text{sz}}=90$ km/h; x: az A és B város távolsága.

Tervezett idő a teljes útra: $t_{\text{sz}}=\frac{x}{60}$ óra; $t_{\text{gy}}=\frac{x}{90}$ óra; $\Delta t=\frac{x}{60}-\frac{x}{90}=\frac{x}{180}$ óra (ennyivel később indul a gyorsvonat). A tényleges idő az A és C városok között:

$$t'_{\text{sz}}=\frac{\frac{2}{3}x}{60}+\frac{\frac{1}{3}x-45}{30}=\frac{2x-135}{90}\text{ óra};\quad t'_{\text{gy}}=\frac{x-45}{90}\text{ óra};$$

$$\Delta t'=\frac{2x-135}{90}-\frac{x-45}{90}=\frac{x-90}{90}\text{ óra}.$$

A kétféleképpen számolt időkülönbség megegyezik:

$$\frac{x}{180}=\frac{x-90}{90}.$$

Ebből $x=180$ km. Tehát az A város a B várostól 180 km-re, a C várostól 135 km-re van.

6. *a) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:*

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{24+x-10\sqrt{x-1}}=5.$$

b) Mely valós számok esetén lesz a $\sin 2x$ *mértani közepe a* $\sin x$*-nek és a* $\cos x$*-nek, ha mindhárom kifejezés nemnegatív értékeket vesz fel?* (*16 pont*)

Megoldás. *a)* A négyzetgyökvonás definíciója miatt: $x\ge 1$. A gyökök alatti kifejezéseket átalakítva az egyenlet:

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-5\right)^2}=5.$$

Ebből:

$$\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-5\right|=5.$$

1. Ha $x\ge 26$, akkor az egyenlet $\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-5=5$, amelyből $2\sqrt{x-1}=12$, és így a megoldása $x=37$.
2. Ha $x<5$, akkor az egyenlet $-\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+5=5$, amelyből $2\sqrt{x-1}=2$, aminek a megoldása $x=2$.
3. Ha $5\le x<26$, akkor az egyenlet $\sqrt{x-1}-2-\sqrt{x-1}+5=5$, amelyből a $3=5$ ellentmondáshoz jutunk.

A 37 és a 2 eleget tesz az eredeti egyenletnek.

b) A mértani közép definíciója és a feltételek miatt:

$$\sin 2x=\sqrt{\sin x\cdot\cos x}\,.$$

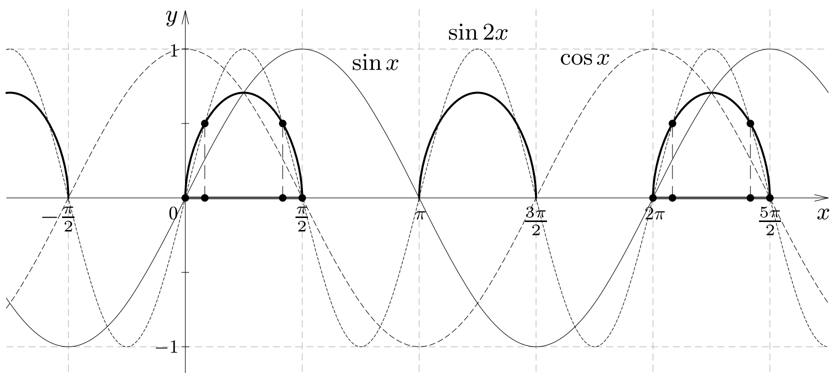
A mértani közép és a négyzetgyök miatt: $\sin x\ge 0$, $\cos x\ge 0$ és $\sin 2x\ge 0$. Ezek a feltételek akkor teljesülnek, ha:

$$2k\pi\le x\le\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

Vezessünk be új ismeretlent: $a := \sqrt{\sin x \cdot \cos x}$. Ekkor az egyenlet a kétszeres szög szinuszára vonatkozó összefüggés felhasználásával a következő lesz:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2\left(\sqrt{\sin x \cdot \cos x}\right)^2 = 2a^2, \quad 2a^2 = a.$$

0-ra redukálás után kiemeléssel szorzattá alakítva: $a \cdot (2a - 1) = 0$.



1. eset: $a = 0$, $\sqrt{\sin x \cdot \cos x} = 0$. Ekkor $\sin x \cos x = 0$, vagyis $\sin 2x = 0$. Ebből

$$(*) \qquad 2x = l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \text{vagyis} \quad x = l\frac{\pi}{2} \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

2. eset: $a = \dfrac{1}{2}$, $\sqrt{\sin x \cdot \cos x} = \dfrac{1}{2}$, vagyis $\sin x \cos x = \dfrac{1}{4}$, és így $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$. Ebből

$$(**) \qquad 2x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{12} + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

vagy

$$(***) \qquad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{5\pi}{12} + m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Az értelmezési tartományt figyelembe véve, az $(*)$, $(**)$ és $(***)$ szögek közül azok, amelyekre a $\sin 2x$ a $\sin x$-nek és a $\cos x$-nek a mértani közepe, a következők:

$$x_1 = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}); \qquad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}),$$

$$x_3 = \frac{\pi}{12} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}), \qquad x_4 = \frac{5\pi}{12} + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

7. *Egy kistermelő földjén nagyon sok görögdinnye termett. Kiválasztott közülük* 33 db *egyforma,* 28 cm *átmérőjű gömb alakú termést, és a közeli piacra vitte értékesíteni.*

a) A termelő az utánfutójában egy rétegben szerette volna elhelyezni a dinnyéket. Bármilyen szorosan is pakolta, nem sikerült. Hány db *dinnyét kellett a gépkocsi hátsó ülésére betenni, ha az utánfutóra a lehető legtöbb dinnyét tette egy rétegben, és az utánfutó belső méretei:* 200 cm × 130 cm?

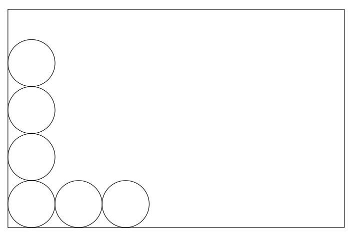
b) A piacon 85 cm *magasak a standok, ahová az árusok kipakolhatják az árut. A gazda kiszámolta, hogy egymás mellé három olyan „piramist”* (3. ábra) *tud építeni a dinnyékből, amelyeknél az alsó szintre hét* (1. ábra), *a második szintre három* (2. ábra), *a harmadik szintre pedig egy dinnyét* (3. ábra) *helyez szorosan egymás mellé, illetve egymásra. Amikor a vevőkkel tárgyal a dinnyehalmok mögül, szereti, ha semmi sem zavarja a beszélgetést és a fizetést. Ezért nem akarta azt, hogy a dinnyékből épített bármelyik rakás csúcsa a földtől számítva* 150 cm*-nél magasabban legyen. Teljesült-e ez a kívánság a fent említett elrendezés esetén?* (*16 pont*)

1. ábra

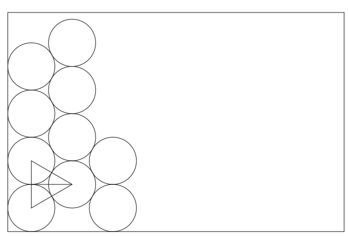
2. ábra

3. ábra

Megoldás. Ha a termelő a *4. ábrán* látható módon helyezi el a dinnyéket, $7 \cdot 4$ db fér el 196 cm $\times$ 112 cm-es területen. Így 5 dinnyét kellene betenni a hátsó ülésre. Azonban a 130 cm széles utánfutó faláig 18 cm távolság marad, ami lehetővé teszi az *5. ábra* szerinti elhelyezést is. Felvetődik a kérdés, hogy így befér-e $8 \cdot 4$ db dinnye is.



4. ábra

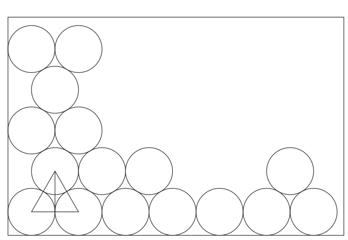


5. ábra

A nyolc oszlopban elhelyezett gömbök $2r + 7m \approx 197{,}74$ cm hosszúságú és $9r = 126$ cm szélességű területet foglalnak el, ahol r a dinnyék sugara, m pedig az *5. ábrán* bejelölt $2r$ oldalú szabályos háromszög magassága, azaz $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 28$ cm.

Mivel az utánfutó 2 m hosszú, így ilyen módon elrendezve összesen $8 \cdot 4 = 32$ db dinnye fér bele, azaz egy dinnyét kellene a hátsó ülésre betenni.

A termelő megpróbálkozott a *6. ábrán* látható elhelyezéssel is. Az ilyen módon 5 sorban elhelyezett dinnyék $2r + 4m \approx 125$ cm-t foglalnak el az utánfutó szélességéből. A hosszabbik dinnyesor pedig $7 \cdot 2r = 196$ cm-t az utánfutó hosszából. Így összesen $3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 = 33$ dinnye fér el, így a hátsó ülés üres marad.



6. ábra

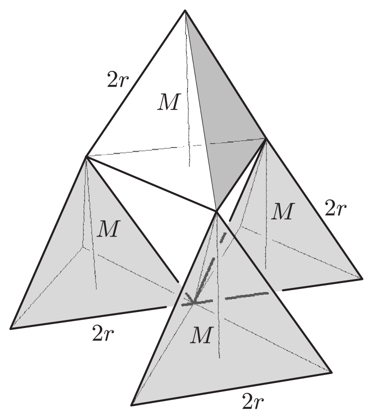
b) Tekintsük a „piramisba” rendezett dinnyék középpontjait. Az első szinten a középpontok egy $2r$ oldalú szabályos hatszög csúcsai, illetve annak középpontja mentén helyezkednek el, az asztal szintjétől r távolságra. A második szinten lévő dinnyék középpontjai egy $2r$ oldalú szabályos háromszöget alkotnak. A csúcsra helyezett egyetlen dinnye középpontjától r távolságra van a halom teteje.

A *7. ábrán* látható módon a dinnyék középpontjai $2r$ élhosszúságú szabályos tetraédereket alkotnak. Az első és a második szint, illetve a második és a harmadik szint távolsága ezen tetraéderek magasságával egyezik meg.

Így a „dinnyepiramis” teteje $2r + 2M$ távolságra van az asztal szintjétől, ahol r a gömbök sugara, M a tetraéder magassága.

$$2r + 2M = 2r + 2 \cdot \frac{2r \cdot \sqrt{6}}{3} \approx 73{,}72 \text{ cm}.$$

Így a stand 85 cm-es magasságát is beszámítva a dinnyehalom teteje a talajtól számítva kb. 158,72 cm magasságra van, ezért nem teljesül a gazda kívánsága.



7. ábra

8. *Adott az* $f\colon\ ]-1;6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left|x^2 - 4x + 3\right| - \left|x^2 - 6x + 5\right|$ *függvény.*

a) *Ábrázoljuk az f függvény grafikonját a megadott értelmezési tartományban.*

i) *Adjuk meg az f függvény értékkészletét.*

ii) *Határozzuk meg algebrai úton az f zérushelyeit.*

b) *Határozzuk meg az f függvény grafikonja 4 abszcisszájú pontjába húzható érintő egyenes iránytangensét és egyenletét.*

c) *Toljuk el az $y = 2x^2 - 10x + 8$ függvény grafikonját a $\mathbf{v}(-2{,}5; 4{,}5)$ vektorral.*

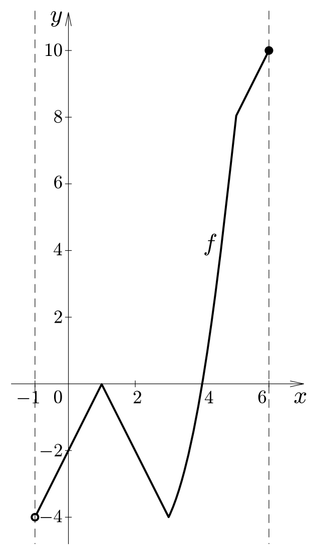
i) *Adjuk meg az így kapott függvény hozzárendelési szabályát.*

ii) *Számítsuk ki az eltolt grafikon és az $y = 4{,}5$ egyenletű egyenes által bezárt síkrész területét.* (*16 pont*)

Megoldás. Mivel $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ és $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-3)$, ezért a függvény (az abszolútérték értelmezése alapján) így néz ki:

$$x \to \begin{cases} 2x - 2, & \text{ha } -1 < x \le 1; \\ -2x + 2, & \text{ha } 1 < x \le 3; \\ 2x^2 - 10x + 8, & \text{ha } 3 < x \le 5; \\ 2x - 2, & \text{ha } 5 < x \le 6. \end{cases}$$

a) Ez alapján a függvény ábrázolható (*1. ábra*).



1. ábra

i) Az értékkészlet a fentiek alapján: $R_f =]-4;10]$.

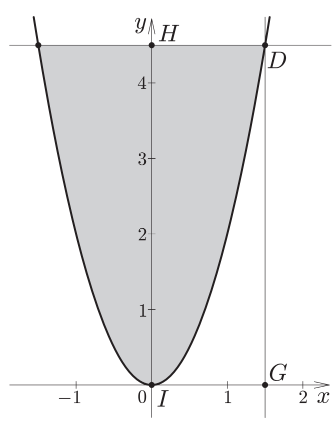
ii) Zérushelyek: $x_1 = 1$ és $x_2 = 4$.

b) Az f grafikonjának $P(4;0)$ pontjába húzzuk az érintőt, melynek az iránytangensét f' adja. Ebben a pontban $f' = 4x - 10$. Vagyis $x = 4$ helyen a meredekségre $m = 6$-ot kapunk. Az érintő egyenlete: $y - y_0 = m(x - x_0)$, ami esetünkben $y = 6(x - 4)$.

i) Az adott vektorral eltolt függvény grafikonjának a hozzárendelési utasítása: $y = 2(x+2{,}5)^2 - 10(x+2{,}5) + 8 + 4{,}5$. A zárójelek felbontása és összevonás után: $y = 2x^2$.

ii) A két függvény grafikonja által bezárt terület szimmetrikus az y tengelyre. Ha kiszámoljuk az I. síknegyedbe eső területet, ekkor a keresett terület ennek éppen a kétszerese (*2. ábra*).

$$\frac{T}{2} = t_{DHIG} - \int_0^{1{,}5} 2x^2, \quad \text{amiből} \quad T = 2(6{,}75 - 2{,}25) = 9.$$



2. ábra

9. *a*) *A Lutri Lottón a* 75*-nél nem nagyobb pozitív egész számok közül húznak ki* 5*-öt úgy, hogy a kihúzott számokat nem teszik vissza, és a húzási sorrend nem számít. Egy szelvénnyel akkor lehet nyerni, ha rajta legalább két találatot értek el. Szerencsés Szilárd* 10 *szelvénnyel játszik a Lutri Lottón. Ha a szelvényeket egymástól függetlenül tölti ki, mennyi annak a valószínűsége, hogy*

1. *nyer;*
2. *legalább három szelvényen két találata lesz?*

b) *Szilárdnak három húga van: Szabina, Szilvia és Szonja. A három lány (Szilárddal együtt) a következő játékot játssza: megkérik édesanyjukat, hogy mondjon egy – találomra kiválasztott – háromjegyű számot. Ha az adott számban az egyik számjegy a másik kettő számtani közepe, akkor Szabina, ha az egyik számjegy a másik kettő mértani közepe, akkor Szilvia, ha pedig egyik feltétel sem teljesül, akkor Szonja kap egy cukorkát Szilárdtól.*

Igaz-e, hogy Szonja nyerési esélye több, mint hatszorosa Szabina nyerési esélyének? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen p_k annak a valószínűsége, hogy Szilárd egy szelvényen pontosan k darab találatot ér el ($k = 0; 1; 2; \ldots; 5$). Ekkor

$$p_k = \frac{\binom{5}{k} \cdot \binom{70}{5-k}}{\binom{75}{5}}.$$

Egy szelvény nem nyerő, ha rajta a játékos 0 vagy 1 találatot ér el.

Legyen A az az esemény, hogy Szilárd a 10 szelvény egyikével sem nyer. Figyelembe véve, hogy a szelvényeket egymástól függetlenül tölti ki, $P(A) = (p_0 + p_1)^{10}$.

$$p_0 = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{70}{5}}{\binom{75}{5}} = \frac{12\,103\,014}{17\,259\,390}, \quad p_1 = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{70}{4}}{\binom{75}{5}} = \frac{4\,584\,475}{17\,259\,390}, \quad p_0 + p_1 = \frac{16\,687\,489}{17\,259\,390}.$$

Így annak a valószínűsége, hogy Szilárd legalább az egyik szelvénnyel nyer:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - (p_0 + p_1)^{10} = 1 - \left(\frac{16\,687\,489}{17\,259\,390}\right)^{10} \approx 0{,}286\,07.$$

b) Egy szelvényen a 2 találat valószínűsége:

$$p_2 = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{70}{3}}{\binom{75}{5}} = \frac{547\,400}{17\,259\,390} \approx 0{,}031\,72.$$

Legyen q_m annak a valószínűsége, hogy Szilárd pontosan m darab szelvényen ér el 2 találatot ($m = 0; 1; 2; \ldots; 10$). Ekkor

$$q_m = \binom{10}{m} \cdot (p_2)^m \cdot (1 - p_2)^{10-m}.$$

Legyen B az az esemény, hogy Szilárdnak legalább három szelvényen két találata lesz. Ekkor $P(B) = 1 - P(\overline{B})$, ahol $\overline{B}$ azt az eseményt jelöli, hogy Szilárdnak legfeljebb két szelvényen lesz két találata. Így

$$\begin{aligned} P(\overline{B}) &= q_0 + q_1 + q_2 = \\ &= \binom{10}{0} \cdot (p_2)^0 \cdot (1 - p_2)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (p_2)^1 \cdot (1 - p_2)^9 + \binom{10}{2} \cdot (p_2)^2 \cdot (1 - p_2)^8 \approx \\ &\approx 0{,}724\,45 + 0{,}237\,32 + 0{,}034\,99 = 0{,}996\,76. \end{aligned}$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy Szilárdnak legalább három szelvényen két találata lesz:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) \approx 1 - 0{,}996\,76 = 0{,}003\,24.$$

c) Véletlenszerűen kiválasztott számról van szó, így az összes háromjegyű szám (egyenlő eséllyel) előfordulhat, ezért olyan $\overline{abc}$ alakú számokat kell vizsgálni, ahol $a; b; c \in \mathbb{N}$, $a; b; c \leq 9$, $a \neq 0$. Összesen 900 darab ilyen szám van (100-tól 999-ig).

Figyelembe véve, hogy az $\overline{aaa}$ alakú számok mindkét feltételt teljesítik, ezek vizsgálatával nem foglalkozunk, de mindkét helyre beszámoljuk őket (összesen 9 darab ilyen szám van).

Jelölje C azt az eseményt, hogy az adott számban egyik számjegy a másik kettő számtani közepe.

Ha a két számjegy számtani közepe	A másik két számjegy	Ennyi darab szám képezhető
1	0 és 2	4
2	0 és 4	4
	1 és 3	6
3	0 és 6	4
	1 és 5	6
	2 és 4	6
4	0 és 8	4
	1 és 7	6
	2 és 6	6
	3 és 5	6
5	1 és 9	6
	2 és 8	6
	3 és 7	6
	4 és 6	6
6	3 és 9	6
	4 és 8	6
	5 és 7	6
7	5 és 9	6
	6 és 8	6
8	7 és 9	6

(A 0 és a 9 nem állítható elő két különböző egyjegyű természetes szám számtani közepeként.)

Összesen $112 + 9 = 121$ ilyen szám van, így Szabina nyerési esélye $P(C) = \frac{121}{900}$.

Jelölje D azt az eseményt, hogy az adott számban egyik számjegy a másik kettő mértani közepe.

Ha a két számjegy mértani közepe	A másik két számjegy	Ennyi darab szám képezhető
0	0 és a	9
2	1 és 4	6
3	1 és 9	6
4	2 és 8	6
6	4 és 9	6

(A többi számjegy nem állítható elő két különböző egyjegyű természetes szám mértani közepeként.)

Összesen $33 + 9 = 42$ ilyen szám van, így Szilvia nyerési esélye $P(D) = \frac{42}{900}$.

Felhasználva a $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ valószínűségszámítási tételt, annak a valószínűsége, hogy Szabina vagy Szilvia nyer:

$$P(C + D) = P(C) + P(D) - P(C \cdot D) = \frac{121}{900} + \frac{42}{900} - \frac{9}{900} = \frac{154}{900}.$$

Mindezek alapján Szonja nyerési esélye:

$$P(\overline{C + D}) = 1 - P(C + D) = 1 - \frac{154}{900} = \frac{746}{900}.$$

Mivel $\frac{746}{900} > 6 \cdot \frac{121}{900} = \frac{726}{900}$, így tehát igaz, hogy Szonja nyerési esélye több, mint hatszorosa Szabináénak.