

I. rész

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

a) Hány $f: A \rightarrow B$ függvény létezik?

b) Ezek közül hány olyan van, amely szigorúan monoton növekvő?

c) Az a) pontban tekintett összes függvény között hány olyan van, amelynek értékkészlete pontosan három elemet tartalmaz? (12 pont)

2. a) Osszuk fel az 1-et négy nemnegatív részre úgy, hogy a részek számtani sorozatot alkossanak. Milyen nagy lehet a sorozat differenciája?

b) Osszuk fel az 1-et négy részre úgy, hogy a részek 2 hányadosú mértani sorozatot alkossanak. Mennyi a sorozat első eleme?

c) Osszuk fel az 1-et négy részre úgy, hogy a részek mértani sorozatot alkossanak. Milyen nagy lehet a sorozat hányadosa? (12 pont)

3. Adjuk meg az $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. (13 pont)

4. Keressük meg az alábbi függvény minimumhelyét:

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(b-x)^2 + c^2}, \quad \text{ahol } a, b, c, x \in \mathbb{R}^+. \quad (14 \text{ pont})$$

II. rész

5. Adjunk meg 13 darab pozitív egész számot úgy, hogy a mediánjuk 2, az átlaguk 2000 legyen. Létezik-e ilyen sokaság, ha azt is megköveteljük, hogy egyetlen módusza legyen, aminek értéke

a) 1;

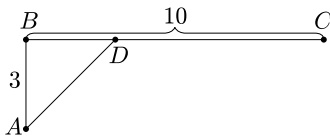
b) 2;

c) 1514;

d) 6000?

e) Mennyi lehet maximum a módusz? (14 pont)

6. Egy gyalogos a hóval borított mező A pontjában van, 3 kilométernyire a BC egyenes úttól (az ábrán $AB = 3$ km, $BC = 10$ km).



Az országúton a gyalogos kétszer akkora sebességgel halad, mint a hómezőn. Mely D pontban kell kimennie a gyalogosnak az útra, hogy a legrövidebb idő alatt jusson C -be? (16 pont)

7. Egy társaságban öt ember találkozott, jelölje őket A, B, C, D, E . Köztük az ismeretségek kölcsönösek. Megkérdeztük őket, kinek hány ismerőse van ötük között. A azt mondta, négy embert ismer. C -ről kiderült, hogy ugyanannyi ismerőse van, mint D -nek. D azt mondta, hogy eggyel kevesebb ismerőse van, mint E -nek. E ismerőseinek száma páratlan.

a) Hány embert ismer D ?

b) Ismerheti-e egymást B és D ?

c) Ismerheti-e egymást C és D ? (16 pont)

8. Jelölje k az $x^2 + y^2 - 25x - 48y + 576 = 0$ egyenletű kört. Határozzuk meg k minden olyan érintő egyenesének egyenletét, amelyre teljesül, hogy az y tengely és a k kör közé eső szakaszának hossza 9,375 egység. (16 pont)

9. Három egymás utáni pozitív egész szám szorzatának prímtényezőző felbontásában csak két különböző prímszám szerepel (tehát a szorzat $p^n q^m$ alakú, ahol p és q prímszám, n, m pozitív egészek). Adjuk meg az összes ilyen számhármaszt. (16 pont)