Az előző részben a mélységi és szélességi bejárás rekurzív és nem rekurzív algoritmusait használtuk föl a Nemes Tihamér Verseny és az Informatika OKTV feladatainak megoldásához. A megoldott két példa és az önálló megoldásra javasolt harmadik feladat esetén könnyen felismerhető volt, hogy melyik gráfalgoritmust érdemes alkalmazni. A feladat pontos megértése után nem volt nehéz az eredeti algoritmusok valamelyikét módosítani. Próbáljunk most megoldani egy összetettebb, az algoritmusok közvetlen alkalmazásánál többet igénylő feladatot.

Informatika OKTV 2014/15, 11–12. osztályosok, 3. forduló

3. feladat: (Családfa)

Ismerjük egy szigeten élő emberek családi leszármazotti viszonyait, a szüleiket, a szüleik szüleit, és így tovább. Minden embernek vagy mindkét szülőjét ismerjük, vagy egyiket sem. Az embereket sorszámmal azonosítjuk.

Készíts programot, amely megadja azokat az embereket, akik a gyermektelen szigetlakók mindegyikének ősei!

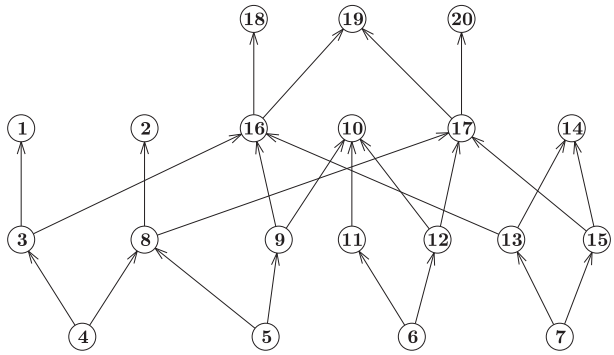
A *standard bemenet* első sorában az emberek száma ($2 \leq \mathsf{N} \leq 10\,000$) és az ismert szülőjű emberek száma ($0 \leq \mathsf{M} < \mathsf{N}$) van. A következő `M` sorban egy gyereknek és a két szülőjének sorszáma van ($1 \leq \texttt{Gyerek} \neq \texttt{Szülő}_1$, $\texttt{Gyerek} \neq \texttt{Szülő}_2$, $\texttt{Szülő}_1 \neq \texttt{Szülő}_2 \leq \mathsf{N}$), egy-egy szóközzel elválasztva.

A *standard kimenet* első sorába a gyermektelen szigetlakók összes közös ősének számát, a második sorába pedig ezek sorszámát kell írni, növekvő sorrendben, egy-egy szóközzel elválasztva! Ha nincs közös ős, akkor az egyetlen sorba egyetlen 0-t kell kiírni!

Megjegyzés: a tesztek nem valós emberi kapcsolatokra épülnek, csupán egy feltételt vesznek figyelembe: saját magának senki sem lehet őse.

Példa:

bemenet	kimenet
20 13 4 3 8 5 8 9 6 11 12 7 13 15 3 1 16 8 2 17 9 16 10 11 16 10 12 17 10 13 16 14 15 17 14 16 18 19 17 19 20	5 16 17 18 19 20



Korlátok:
időlimit: 0,5 mp,
memórialimit: 32 MiB.

Pontozás:
Pontozás: a tesztek 60%-ában $\mathsf{N} < 100$.

Mivel ez egy OKTV döntős feladat, ezért a megoldás értékelését számítógép végzi úgy, hogy lefuttatja a versenyző által elkészített programot bizonyos bemenetekre, és megvizsgálja a kapott kimeneteket. A korlátok most azt jelentik, hogy az összes bemeneti tesztállomány esetén legföljebb 32 MiB memóriát használhat a program, amelynek 0,5 másodpercen belül be kell fejeződnie. A feladatot futtató rendszer az esetek 60%-ában 100-nál kevesebb személyt tartalmazó bemeneti állománnyal teszteli és értékeli a programunkat, míg a többi esetben N értéke valószínűleg nagyobb 100-nál. Ha olyan programot készítünk, amely 100-nál kisebb bemenetekre lefut 0,5 másodperc alatt, akkor a feladatért kapható pontok 60%-ra biztosan számíthatunk. Ha a program a nagyobb elemszámú bemenetekre nem fut le, mert nem tud elegendő memóriát foglalni vagy nem fejeződik be időre, akkor azokra a tesztesetekre nem kapunk pontot.

Nézzük meg, hogy eddigi ismereteink alapján hogyan oldanánk meg a feladatot. A családi kapcsolatok leírására kiválóan alkalmazhatók a gráfok: a személyeket a gráf csúcsai, a szülő-gyermek viszonyt az élek reprezentálják. Matematikailag is helyes a „családfa” kifejezés, mivel egy ilyen gráfban – a megjegyzés ezt külön hangsúlyozza – nem fordulhat elő irányított kör, hiszen úgy valaki önmagának lenne az őse.

A feladathoz mellékelt példa gráfja egy irányított gráf, amelynél a gyermekek csomópontjaiból élek mutatnak mindkét szülőjük csomópontjaiba. A gyermektelen személyek tehát azok, amelyek csomópontjába nem vezet él, vagyis az ábrán a 4, 5, 6, 7 sorszámú emberek. Az ő őseik azok, akikhez tőlük az irányított gráfban el lehet jutni, míg a közös őseik azok, akikhez mindegyikőjüktől el lehet jutni. A feladat egyszerűen megoldható a következő gondolatmenet szerint:

1. megkeressük a gyermektelen sorszámú személyeket;

2. minden gyermektelen személytől indítunk egy bejárást, és följegyezzük, hogy melyik csúcsokhoz lehet tőle eljutni;

3. összevetjük a 2. pontban kapott eredményeket, és megadjuk azokat a személyeket, ahová mindegyik bejárás során eljutottunk.

A feladatot ezzel megoldottuk, de gondolkozzunk el azon, hogy mennyire hatékony a megoldásunk. A feladatban legföljebb 10 000 személy szerepel, amelyek között egy-egy konkrét példában akár több száz gyermektelen is lehet, így a 2. pontban több százszor kell bejárni egy, akár ezer csúcsot tartalmazó gráfot. Ez sajnos azzal járhat, hogy a megoldásunk jó, de nem fut le a feladathoz megadott 0,5 másodperc alatt. Vajon honnan tudhatnánk előre, hogy elég gyors lesz-e tetszőleges bemenetre a megoldásunk? Vagy megírjuk a programot és kipróbáljuk, vagy becslést adunk a lehetséges futásidőre, tehát végiggondoljuk a leendő programunk memóriahasználatát és lépésszámát. Tegyük most először ezt:

A bemenetről megkapjuk a *gyermek* – *szülő1* – *szülő2* számhármasokat, amelyekből fölépítjük az irányított gráfot. Legyen egy N sorból és két oszlopból álló `él` táblázat, amelynek i-edik sorában az i-edik személy két szülőjének sorszáma szerepel. A táblázatban szereplő pozitív érték jelentse a szülők sorszámát, a nulla vagy negatív érték azt, hogy nem rendelkezik szülőkkel (a táblázat M számú sorában lesz pozitív érték). A 10 000-es számkör egészei elférnek két bájton, a táblázat 20 000 egészet tartalmaz, tehát 40 KiB elegendő lesz a gráf éleinek tárolásához a memóriában.

A gyermektelen tulajdonság jelölésére fölveszünk egy `gytn` nevű, szintén N méretű táblázatot, amelyben elég egy logikai érték tárolása, ami egyszerűen elfér N bájton, így legföljebb 10 KiB-ot foglal. A táblázatot az `él` táblázat alapján tudjuk kitölteni: kezdetben minden személy gyermektelen, majd végigjárjuk az `él` táblázatot, és aki megjelenik szülőként, annál módosítjuk a gyermektelen tulajdonságot.

```
gytn_jelölés
 gytn[] := igaz
 Ciklus személy := 1-től N-ig
     Ha él[személy][1]>0 akkor
         gytn[él[személy][1]] := hamis
         gytn[él[személy][2]] := hamis
     Elágazás vége
gytn_jelölés vége
```

Az előbbi algoritmus futásidejét a következőképp becsülhetjük. Az első sorban a teljes `gytn` táblázat feltöltése valójában N értékadás, tehát N elemi lépés. A második sorban induló ciklus szintén N-szer végez feltételvizsgálatot, és nyilván kevesebb, mint N-szer két értékadást. Azt mondhatjuk, hogy a teljes programrész futási ideje N értékével egyenesen arányos, vagyis a bemenet elemszámának lineáris függvénye. Az arányossági tényező és a lineáris függvény pontos alakja attól függ, hogy mennyi idő alatt végez el egy elemi műveletet a futtató számítógép, mennyi időbe telik egy értékadás, egy összehasonlítás, egy vezérlésátadás. Ezek a részletek számunkra nem fontosak, de annyit biztosan állíthatunk, hogy bármely számítógépen futtatva a fenti programrészletet a futási idő és N értéke között lineáris kapcsolatot találnánk.

Az előbbi megfontolás alapján N-nel arányos futásidejű az a programrész is, amely még a `gytn_jelölés` előtt fut le azért, hogy nullázza az `él` táblázatot, majd beolvassa a standard bemenetről a kapott adatokat és kitöltse az `él` táblázatot a beolvasott adatok alapján. Bár a beolvasás feltehetőleg hosszabb időt igényel, mint egy memóriaművelet vagy egy számítás a processzorban, de a lépésszám most is a bemenettel egyenesen arányos. Ezek alapján a megoldás 1. részének becsült futás ideje a bemenet N elemszámának lineáris függvénye.

Foglalkozzunk a megoldás tervének 2. és 3. részével. Válasszuk a szélességi bejárás nem rekurzív változatát a gyermektelen csúcsoktól induló bejáráshoz. Vegyünk föl egy `ős` tömböt, amelynek elemei logikai értékek, és a k-adik elem megadja, hogy a k sorszámú csúcs lehet-e az eddigi bejárások alapján közös ős. A bejárások kezdése előtt a tömbben adjuk meg, hogy a gyermektelenek nem lehetnek ősök, a többiek igen. Minden bejárás után a `jártunk` tömb és az `ős` tömb elemei közötti logikai `és` művelet eredményét írjuk az `ős` tömbbe. Az első bejárás után az `ős` tömb maga a `jártunk` tömb lesz, vagyis megmutatja, hogy melyek az elsőnek választott gyermektelen személy ősei. A következő bejárás után az első két gyermektelen közös ősei esetén lesz az `ős` tömb egy eleme igaz, és így tovább. Az összes bejárás után megkapjuk, hogy mely csúcsok lesznek közös ősök, vagyis melyek azok, amelyekhez minden bejáráskor elértünk.

A szélességi bejárás a korábbiakhoz hasonlóan egy *sor* segítségével történik, amelybe először csak a bejárás kezdő csúcsa van. A bejárás csak annyiban tér el a korábban ismertetett változattól, hogy minden csúcsból vagy két él indul ki, vagy egy sem. Egy bejárás során a sorba kevesebb, mint N csúcs kerül, így a sor memóriaigénye legföljebb $2N$, vagyis kevesebb, mint 20 KiB.

```
Családfa
 él_tömb_elkészítése
 gytn_jelölés
 Ciklus sz := 1-től N-ig
     ős[sz] := nem gytn[sz]
 Ciklus vége
 Ciklus k := 1-től N-ig
     Ha gytn[k] akkor
```

```
            jártunk[] := hamis
            Sor_legyen_üres
            Sorba(k)
            jartunk[k] = igaz
            Ciklus amíg Sor nem üres
                Sorból(személy)
                jártunk[személy] := igaz
                Ha él[személy][1]>0 akkor
                    szülő1 := él[személy][1]
                    szülő2 := él[személy][2]
                    Ha nem jártunk[szülő1] akkor Sorba(szülő1) ; jártunk[szülő1] := igaz
                    Ha nem jártunk[szülő2] akkor Sorba(szülő2) ; jártunk[szülő1] := igaz
                Elágazás vége
            Ciklus vége
            ős[] := ős[] és jártunk[]
        Elágazás vége
    Ciklus vége
Családfa vége
```

Becsüljük meg a *Családfa* algoritmus futásidejét. A k változójú ciklus előtti részről láttuk, hogy N-nel arányos lépésszámú, míg a k változójú ciklus N-szer fut le, de lényegi műveletvégzés csak azokban az esetekben történik, amikor a k-adik csúcs gyermektelen személyt jelöl.

Legyen egy tesztesetben g számú gyermektelen ($1 \leq g \leq N$). Mivel a `jártunk` tömb hamis értékkel történő feltöltése, valamint a bejárás után az `ős` és a `jártunk` tömb elemei közötti `és` művelet N lépést igényel, így a k változójú ciklus lépésszáma legalább $g \cdot 2N$. Ebben a ciklusban van még a szélességi bejárás is, melynek futásideje attól függ, hogy az induló csúcstól mekkora része járható be a gráfnak. Adott N és g mellett a bejárás a gyermektelen csúcsot, valamint még legföljebb $N - g$ számú további csúcsot jár be, helyez a sorba, azaz a bejárás $N - g$-vel arányos lépésszámú. A bemenetek elég különbözőek lehetnek, így a k indexű ciklus lépésszáma $g \cdot (N + N + N - g)$-vel arányos, amit a számtani-mértani egyenlőtlenség segítségével könnyen felülről becsülhetünk:

$$g \cdot (3N - g) \leq \big((g + 3N - g)/2\big)^2.$$

Előfordulhat tehát, hogy a tesztesetek egy részében algoritmusunk N^2-tel arányos lépésszámú műveletet végez, vagyis a futásidő a bemenet elemszámának négyzetes függvénye. Ilyen gráfot nem is olyan nehéz készíteni, pl. $N = 2 \cdot g - 1$ csúcsot rendezzünk el úgy, hogy g számú testvérnek azonos a két szülője, és minden további szülőnek azonos a két szülője (a feladat kitűzésénél szereplő megjegyzés szerint nem csak a megszokott családi kapcsolatok lehetségesek). Így a g gyermektelentől kiindulva az algoritmusunk g-szer bejárja ugyanazt a szülőkből álló $N - g$ csúcsú gráfot, tehát csak a bejárás lépésszáma az előzőekhez hasonlóan közelítéssel N^2-tel arányos.

Összefoglalva megállapíthatjuk a becslés alapján, hogy az elkészített algoritmus legrosszabb esetben is N^2-tel arányos lépésszámú, tehát $N < 100$ esetén legföljebb 10 000-es nagyságrendű elemi műveletet hajt végre, vagyis várhatóan gyorsan lefut egy mai számítógépen. De $N = 10\,000$ esetén a lépésszám már 10^8-nal arányos, vagyis a 100-nál kisebb esetek lépésszámának 10 000-szerese is lehet. Abban már nem lehetünk benne biztosak, hogy ilyen elemszám mellett is befejeződik az algoritmus az előírt idő alatt. A feladatra kapható teljes pontszám megszerzéséhez érdemes volna egy hatékonyabb, kisebb lépésszámú algoritmust kitalálnunk.

Persze kérdés, hogy létezik-e lényegesen jobb, nem N^2-tel arányos lépésszámú megoldás. Ha a versenyen a kész programunk minden bemenetre megkapja az elérhető összes pontot, akkor nem érdemes tovább töprengeni. A következő számban bemutatunk egy „kicsit” jobb megoldást, de előtte arra kérjük olvasóinkat, hogy találjanak ki a most megismertnél ügyesebb algoritmust. Az ötleteket a KöMaL fórumban az Informatika OKTV rovatban várjuk.