I. rész

1. *Ágoston és Benedek egy-egy marék kavicsot tartanak a kezükben. Ha Benedek a sajátjai közül* 10 *kavicsot átadna Ágostonnak, akkor a kezükben tartott kavicsok számának szorzata* 150*-nel csökkenne. Ha Benedek nem* 10*, hanem* 20 *kavicsot adna át Ágostonnak, akkor a kezükben tartott kavicsok számának szorzata a harmadára csökkenne. Hány kavicsot tartottak a kezükben kezdetben?* (*12 pont*)

Megoldás. Jelölje kezdetben Ágoston kavicsainak számát a, Benedek kavicsainak számát b.

A feladat szövege alapján felírható egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned}(a+10)(b-10)&=ab-150,\\(a+20)(b-20)&=\frac{ab}{3}.\end{aligned}\right\}$$

Az első egyenlet bal oldalán elvégezve a kijelölt szorzást, majd 10-zel osztva és rendezve $a = b + 5$ adódik. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe, majd 3-mal beszorozva:

$$3(b+25)(b-20)=(b+5)b.$$

A műveleteket elvégezve, 2-vel osztva és nullára rendezve a $b^2+5b-750=0$ egyenletet kapjuk. Ennek az egyenletnek a gyökei $b_1 = 25$ és $b_2 = -30$.

A negatív gyök nyilván nem megoldása a feladatnak.

Ellenőrzés. Ha Benedeknek kezdetben 25 kavicsa volt, akkor Ágoston $25 + 5 = 30$-at tartott a kezében, ezek szorzata 750. Ha Benedek 10 kavicsot átad Ágostonnak, akkor kavicsaik számának szorzata $15\cdot 40 = 600$ lesz, tehát valóban 150-nel csökkent. Ha nem 10, hanem 20 kavicsot ad át, akkor a szorzat $5 \cdot 50 = 250$ lesz, tehát valóban harmadára csökken.

Tehát kezdetben Benedeknek 25, Ágostonnak 30 kavics volt a markában.

2. *Határozzuk meg az x értékét úgy, hogy az x^2+x-2, az $2x^2+x+3$ és a $4x^2-12$ kifejezések értéke ebben a sorrendben egy*

a) számtani;

b) mértani

sorozat három egymást követő tagja legyen. (*13 pont*)

Megoldás. *a*) Ha a három kifejezés értéke számtani sorozatot alkot, akkor

$$\left(x^2+x-2\right)+\left(4x^2-12\right)=2\left(2x^2+x+3\right).$$

Rendezve: $x^2-x-20=0$. Az egyenlet megoldásai $x_1 = 5$ és $x_2 = -4$.

Ellenőrzés. Az első esetben a sorozat 28; 58; 88, a második esetben pedig 10; 31; 52, mindkettő jó. Tehát x értéke 5 vagy -4 lehet.

b) Ha a három kifejezés értéke mértani sorozatot alkot, akkor

$$\left(x^2+x-2\right)\left(4x^2-12\right)=\left(2x^2+x+3\right)^2.$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket:

$$4x^4+4x^3-20x^2-12x+24=4x^4+4x^3+13x^2+6x+9.$$

Rendezve: $0=33x^2+18x-15=3\left(11x^2+6x-5\right)$. Az egyenlet megoldásai $x_1=-1$ és $x_2=\frac{5}{11}$.

Ellenőrzés. Az első esetben a sorozat -2; 4; -8, a második esetben pedig $-\frac{162}{121}$; $\frac{468}{121}$; $-\frac{1352}{121}$ (ekkor a hányados $-\frac{26}{9}$), mindkettő jó.

Tehát x értéke -1 vagy $\frac{5}{11}$ lehet.

3. *a*) *Legyen a és b egy-egy olyan egész szám, amelyeket véletlenszerűen választunk a $[-10;10]$ intervallumból. Mekkora a valószínűsége, hogy az $y=ax+b$ egyenletű egyenes áthalad a $P(2;6)$ ponton?*

b) *Legyen G egy hétpontú teljes gráf, csúcsai P, Q, R, S, T, U és V. Hány olyan négypontú köre van G-nek, amely P és Q közül legalább az egyik csúcson áthalad?* (*13 pont*)

Megoldás. a) Mivel a és b értéke is egymástól függetlenül 21-féle lehet, az összes esetek száma 441.

Kedvező esetet akkor kapunk, amikor P rajta van az egyenesen, tehát $6 = 2a + b$, azaz $a = 3 - \frac{b}{2}$.

Ha b páratlan, akkor a értékére nem egész szám adódik, tehát ekkor nincs megoldás.

Ha $-10 \le b \le 10$ és b páros, akkor egyrészt a egész, másrészt $-2 \le a = 3 - \frac{b}{2} \le 8$, tehát minden -10 és 10 közötti páros b értékhez tartozik egy-egy jó a érték, azaz 11 kedvező eset van.

A keresett valószínűség ezért $\frac{11}{441} \approx 0{,}025$.

b) *I. megoldás.* A gráf négy kiválasztott pontja három különböző négypontú kört határoz meg, mert háromféleképpen lehet kiválasztani a körben egymással nem szomszédos csúcspárokat.

A P csúcshoz az R, S, T, U és V csúcsok közül $\binom{5}{3} = 10$-féleképpen választhatunk ki másik hármat egy P-t igen, de Q-t nem tartalmazó négypontú körhöz.

Hasonlóképpen a Q csúcshoz is 10-féleképpen választhatunk ki másik hármat egy Q-t igen, de P-t nem tartalmazó négypontú körhöz.

Végül egy P-t és Q-t is tartalmazó négypontú körhöz $\binom{5}{2} = 10$-féleképpen választhatunk ki másik kettőt a maradék öt csúcs közül.

Mivel mind a 30 lehetséges pontnégyes három különböző négypontú kört határoz meg, így a feltételeknek megfelelő körök száma 90.

II. megoldás. A gráf négy kiválasztott pontja három különböző négypontú kört határoz meg, mert háromféleképpen lehet kiválasztani a körben egymással nem szomszédos csúcspárokat.

A gráf pontjai közül $\binom{7}{4} = 35$-féleképpen választhatunk ki négyet egy négypontú körhöz. Ezen pontnégyesek számából levonjuk a rossz pontnégyesek számát, melyek sem P-t, sem Q-t nem tartalmazzák. Az ilyen pontnégyesek száma $\binom{5}{4} = 5$, tehát összesen $35 - 5 = 30$ megfelelő pontnégyes van.

Mivel mind a 30 lehetséges pontnégyes három különböző négypontú kört határoz meg, így a feltételeknek megfelelő körök száma 90.

4. a) *Mi lehet az alapszáma annak a számrendszernek, melyben teljesül az alábbi egyenlőtlenség?*

$$1410 < 1254 + 135.$$

b) *Egy n elemű halmaznak feleannyi 7 elemű részhalmaza van, mint 8 elemű. Határozzuk meg az n értékét.* (*13 pont*)

Megoldás. a) Mivel az egyenlőtlenségben szereplő legnagyobb számjegy az 5, ezért a számrendszer n alapszámára $n \ge 6$ teljesül (és $n \in \mathbb{Z}$).

Az n alapú számrendszer helyiértékei jobbról balra 1, n, n^2 és n^3, ezért az egyenlőtlenség így írható:

$$n^3 + 4n^2 + n < \left(n^3 + 2n^2 + 5n + 4\right) + \left(n^2 + 3n + 5\right).$$

Rendezve: $n^2 - 7n - 9 < 0$.

A megfelelő másodfokú egyenlet gyökei:

$$n_1 = \frac{7 + \sqrt{85}}{2} \approx 8{,}1 \quad \text{és} \quad n_2 = \frac{7 - \sqrt{85}}{2} \approx -1{,}1.$$

Mivel a másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, ezért az egyenlőtlenség $n_1 < n < n_2$ esetén teljesül.

Figyelembe véve még a megoldás elején kapott feltételt is, a számrendszer alapszáma 6, 7 vagy 8 lehet.

b) Az n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma $\binom{n}{k}$. Ha a halmaznak feleannyi 7 elemű részhalmaza van, mint 8 elemű, akkor

$$\frac{1}{2} = \frac{\binom{n}{7}}{\binom{n}{8}} = \frac{\frac{n!}{7!\cdot(n-7)!}}{\frac{n!}{8!\cdot(n-8)!}} = \frac{n!}{7!\cdot(n-7)!}\cdot\frac{8!\cdot(n-8)!}{n!} = \frac{8}{n-7},$$

ahonnan $n = 23$.

Ellenőrzés. A 23 elemű halmaz 7 elemű részhalmazainak száma $\binom{23}{7} = 245\ 157$, ez valóban fele a 8 elemű részhalmazok számának, mely $\binom{23}{8} = 490\,314$.

II. rész

5. *Három testvér betér egy fagylaltozóba. Nyolcféle fagylalt kapható: citrom, csokoládé, eper, karamell, meggy, puncs, sárgabarack és vanília.*

(Az alábbi kérdéseknél a gombócok sorrendjétől minden esetben eltekintünk.)

a) Tünde három különböző ízű gombócot szeretne kérni. A puncsot nem szereti, ezért azt biztosan nem kér, a citrom viszont a kedvence, ha van, azt sosem mulasztja el. Hányféleképpen választhat Tünde?

b) Viola is háromgombócos fagyit eszik, de csak a csokoládét, a karamellt, a puncsot és a vaníliát szereti. Hányféleképpen választhat Viola, ha egy-egy ízből akár több gombóccal is ehet?

c) Zolinak mindegy, mit kap, ezért csak annyit mond a fagylaltosnak, hogy három különböző ízt szeretne. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három gombóc közül pontosan kettő gyümölcsízű (citrom, eper, meggy vagy sárgabarack) lesz? (A fagylaltos a három gombóc ízét egymástól függetlenül, véletlenszerűen választja ki.)

d) Egy jó közelítéssel forgáskúp alakú tölcsér alapkörének belső átmérője 58 mm, *magassága* 83 mm. *Hány* dkg $0{,}6\ \mathrm{g/cm^3}$ *sűrűségű fagylalt fér ebbe a tölcsérbe, ha színültig töltjük?* *(16 pont)*

Megoldás. *a)* Hat lehetséges íz közül kell kiválasztani két különbözőt úgy, hogy a kiválasztott ízek sorrendje nem számít. A lehetséges kiválasztások száma $\binom{6}{2}=21$.

b) I. megoldás. Ha három különböző ízt kér, akkor 4 lehetősége van (aszerint, hogy melyiket hagyja ki).

Ha két különbözőt kér, akkor 4-féleképpen választhatja ki azt az ízt, amelyből két gombócot is kér, s e mellé 3-féleképpen a másikat. Ez összesen $4\cdot3=12$ különböző lehetőséget jelent.

Ha csak egyféle ízt kér, akkor ismét 4 lehetősége van.

Összesen tehát $4+12+4=20$-féleképpen kérhet a feltételeknek megfelelően.

II. megoldás. 4 íz közül kell kiválasztani hármat úgy, hogy a kiválasztott ízek sorrendje nem számít, de egy-egy ízt többször is kiválaszthat. Ez megfelel 4 elem harmadosztályú ismétléses kombinációjának. A lehetőségek száma így $\binom{4+3-1}{3}=\binom{6}{3}=20$.

c) I. megoldás. Négy gyümölcsíz közül kell kettőt, és a négy nem gyümölcsíz közül egyet kiválasztani (a sorrendre való tekintet nélkül). A kedvező esetek száma így $\binom{4}{2}\binom{4}{1}=24$. Az összes eset száma: $\binom{8}{3}=56$. A kérdezett valószínűség így

$$p=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}\ (\approx 0{,}429).$$

II. megoldás. Legyen az első gombóc gyümölcsízű, ennek a valószínűsége $\frac{4}{8}$. Annak a valószínűsége, hogy a második gombóc is gyümölcsízű (mivel az elsőnek választott ízt már nem kaphatja), $\frac{3}{7}$. Annak a valószínűsége, hogy a harmadik gombóc nem gyümölcsízű, $\frac{4}{6}$.

Mivel a három esemény egymástól független, ezért annak a valószínűsége, hogy a három gombóc közül az első kettő gyümölcsízű, a harmadik nem, az előzőek szorzata, tehát $\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{7}$.

A nem gyümölcsízű gombócot ugyanekkora valószínűséggel kaphatja elsőként vagy másodikként is, így a keresett valószínűség ennek az értéknek a háromszorosa, tehát $\frac{3}{7}$ $(\approx 0{,}429)$.

d) $r=2{,}9$ cm, $m=8{,}3$ cm.

A tölcsér térfogata $V=\dfrac{2{,}9^2\cdot\pi\cdot8{,}3}{3}$ $(\approx 73{,}1\ \mathrm{cm}^3)$. Ebbe a tölcsérbe így (színültig töltve) $m=\rho V\approx 43{,}9$ g, azaz kb. 4,4 dkg fagylalt fér.

6. *Egy* 20 cm *sugarú körbe írt* ABC *hegyesszögű háromszög két oldala* $AC=34$ cm *és* $BC=30$ cm.

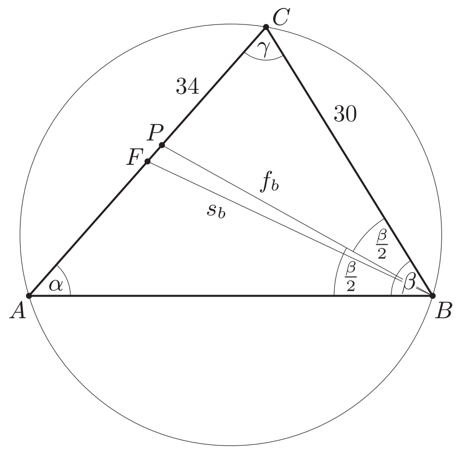
a) Határozzuk meg a háromszög AB *oldalának hosszát.*

b) Határozzuk meg a háromszög B *csúcsához tartozó szögfelezőjének és súlyvonalának hosszát.* *(16 pont)*

Megoldás. *a)* Jelöljük a háromszög szögeit a szokott módon α-val, β-val, illetve γ-val. Az ismert $a=2r\cdot\sin\alpha$ képlet alapján

$$\sin\alpha=\frac{30}{2\cdot20}=0{,}75,$$

ahonnan $\alpha\approx48{,}6^\circ$ (hiszen hegyesszög).



$\sin\beta = 0{,}85$, ahonnan $\beta \approx 58{,}2^\circ$ (hiszen hegyesszög). Innen

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 73{,}2^\circ,$$

majd

$$AB = 2 \cdot 20 \cdot \sin 73{,}2^\circ \approx 38{,}3 \text{ cm}.$$

b) Az AC oldal felezőpontját F-fel jelölve a B csúcsból induló súlyvonal hossza (s_b) kiszámítható a BCF háromszögből koszinusztétellel:

$$s_b = \sqrt{30^2 + 17^2 - 2 \cdot 30 \cdot 17 \cdot \cos\gamma} \approx 29{,}9 \text{ cm}.$$

A B-ből induló szögfelező metszéspontját az AC oldallal jelölje P.

$$CPB\sphericalangle = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \gamma \approx 77{,}7^\circ.$$

A B-ből induló szögfelező hossza (f_b) ezután kiszámítható a BCP háromszögből szinusztétellel:

$$\frac{f_b}{30} = \frac{\sin\gamma}{\sin CPB\sphericalangle}, \quad \text{ahonnan} \quad f_b \approx 29{,}4 \text{ cm}.$$

7. *Van hatféle számkártyánk, mindegyikből* 1-1 *darab:* 1, 2, 3, 4, 5, 6. *A kártyákat véletlenszerűen sorba rendezve hatjegyű számokat képezünk.*

a) *Igazoljuk, hogy* $\frac{4}{15}$ *annak a valószínűsége, hogy az így kapott szám osztható lesz* 12*-vel.*

b) *Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az így kapott szám a 6-os számjeggyel kezdődik, feltéve, hogy* 12*-vel osztható.*

c) *Egy papírlapra felírjuk a számkártyákból képezhető összes lehetséges hatjegyű számot.*
Határozzuk meg a papírlapra felírt számok mediánját. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) 12-vel akkor osztható egy szám, ha 3-mal és 4-gyel is osztható. A képzett szám 3-mal biztosan osztható lesz, mert (a kártyák sorrendjétől függetlenül) számjegyeinek összege 21 (ami osztható 3-mal). 4-gyel akkor osztható egy szám, ha az utolsó két számjegyéből képzett szám osztható 4-gyel. Az utolsó két helyre ezért a következő kártyák kerülhetnek: 12, 32, 52, 24, 64, 16, 36, 56, ez 8 lehetőség.

Az utolsó két helyre az összes lehetőség: $6 \cdot 5 = 30$. Mivel minden esetben ugyanannyiféle lehet az első négy számjegy, a keresett valószínűség $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

b) Jelölje A azt az eseményt, hogy a kapott szám 6-ossal kezdődik, B pedig azt az eseményt, hogy 12-vel osztható. Ezzel a jelöléssel meghatározandó a $P(A \mid B)$ valószínűség. A feltételes valószínűség definíciója szerint

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Tudjuk, hogy $P(B) = \frac{4}{15}$. Határozzuk meg $P(AB)$-t: ha a kapott szám 6-ossal kezdődik, akkor 12-vel csak akkor lehet osztható, ha az utolsó két számjegyéből képzett szám 12, 32, 52 vagy 24. A második, harmadik és negyedik számjegy mind a négy esetben $3! = 6$-féle lehet. Összesen tehát $6 \cdot 4 = 24$ ilyen szám van.

Az összes felírható szám $6! = 720$. Tehát

$$P(AB) = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}.$$

Ezért

$$P(A \mid B) = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{4}{15}} = \frac{1}{8}.$$

c) 720 darab ilyen szám van, a medián ezért a nagyság szerint sorba rendezett számok közül a két középső átlaga. Nagyság szerint a két középső szám a legnagyobb 3-mal és a legkisebb 4-gyel kezdődő szám lesz, ezek a 365 421 és a 412 356, ezért a medián

$$\frac{365\,421 + 412\,356}{2} = \frac{777\,777}{2} = 388\,888{,}5.$$

8. *Gyurta Dániel* 2009*-ben, Rómában szerezte első világbajnoki aranyérmét a* 200 *méteres mellúszásban. Győztes ideje* 2:07.64 *volt* (2 *perc* 7 *másodperc* 64 *századmásodperc*). *Egyetlen századmásodperccel előzte meg az amerikai Eric Shanteau-t.*

a) *Határozzuk meg Gyurta Dániel átlagsebességét a teljes távon. A választ* km/h*-ban, egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.*

b) *Az úszók rendszerint gyorsabbak a táv elején. Gyurta Dániel a második* 100 *métert* 1:05.50 *alatt tette meg. Ezen belül az utolsó* 50 *méter megtételéhez* 10 *századmásodperccel több időre volt szüksége, mint a megelőző* 50 *méter megtételéhez. Határozzuk meg Gyurta Dániel idejét az utolsó* 50 *méteren.*

c) *Eric Shanteau az első* 100 *métert* 1:01.22*, a második* 100 *métert* 1:06.43 *alatt tette meg. Gyurta Dániel célba érkezésekor az amerikai úszónak még hány centiméter volt hátra a teljes távból? (Tételezzük fel, hogy a második* 100 *métert egyenletes tempóban tette meg a versenyző.) A választ egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.*

d) *Hugó, Hanna és Ödön, a három testvér ugyanabba az uszodába járnak úszóedzésre. Hugó (a legkisebb) a* 20 *méteres, Hanna a* $33\frac{1}{3}$ *méteres, Ödön az* 50 *méteres medencében edz. Az egyik edzésen Hanna néggyel több hosszt úszott, mint Ödön, Hugó pedig néggyel több hosszt úszott, mint Hanna. A Hugó, Hanna és Ödön által leúszott távolságok (ebben a sorrendben) egy növekvő számtani sorozat szomszédos tagjai.*

Határozzuk meg mindhárom gyerek esetén az edzésen általa leúszott távolságot. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) 2 perc 7 másodperc 64 századmásodperc = 127,64 másodperc = $\frac{127{,}64}{3600}$ óra, 200 m = 0,2 km. Gyurta Dániel átlagsebessége

$$\frac{0{,}2}{\frac{127{,}64}{3600}} = \frac{720}{127{,}64} \approx 5{,}6 \text{ km/h} \quad \text{volt.}$$

b) $x = \frac{1:05.50 - 0:00.10}{2} = \frac{1:05.40}{2} = \frac{65.40}{2} = 32.70$ az ideje a harmadik, 32.80 pedig az utolsó 50 méteren.

Event 125

Men's 200m Breaststroke
200m Brasse Hommes

Final
Finale

Results
Résultats

	Record	Splits			Name	NOC Code	Location	Date
WR	2:07.31	28.91	1:01.51	1:34.49	SPRENGER Christian	AUS	Roma (ITA)	30 JUL 2009
CR	2:07.31	28.91	1:01.51	1:34.49	SPRENGER Christian	AUS	Roma (ITA)	30 JUL 2009

Final **Event No. 25**

Rank	Lane	Name	NOC Code	R.T.	50m	100m	150m	Time	Time Behind
1	6	**GYURTA Daniel**	HUN	0.86	(7) 29.30	(8) 1:02.14 32.84	(6) 1:34.84 32.70	**2:07.64** 32.80	
2	5	**SHANTEAU Eric**	USA	0.75	(4) 28.91	(4) 1:01.22 32.31	(2) 1:34.25 33.03	**2:07.65** 33.40	0.01
3	2	**TITENIS Giedrius**	LTU	0.86	(2) 28.81	(2) 1:01.14 32.33	(3) 1:34.26 33.12	**2:07.80** 33.54	0.16
3	4	**SPRENGER Christian**	AUS	0.73	(1) 28.65	(3) 1:01.17 32.52	(4) 1:34.55 33.38	**2:07.80** 33.25	0.16
5	3	**RICKARD Brenton**	AUS	0.76	(3) 28.89	(1) 1:01.04 32.15	(1) 1:34.08 33.04	**2:08.23** 34.15	0.59
6	8	**GIORGETTI Edoardo**	ITA	0.73	(8) 29.48	(7) 1:02.08 32.60	(7) 1:34.96 32.88	**2:08.86** 33.90	1.22
7	1	**BARBOSA Henrique**	BRA	0.82	(5) 28.93	(5) 1:01.45 32.52	(5) 1:34.66 33.21	**2:09.35** 34.69	1.71
8	7	**FACCI Loris**	ITA	0.84	(6) 29.10	(6) 1:01.87 32.77	(8) 1:35.55 33.68	**2:10.26** 34.71	2.62

c) Shanteau a második 100 métert (egyenletes tempóban) 66 másodperc 43 századmásodperc, tehát 6643 századmásodperc alatt tette meg. Gyurta Dániel célba érkezésekor még 1 századmásodpercnyi útja, azaz

$$\frac{100}{6643} \approx 0{,}015 \text{ méter} = 1{,}5 \text{ cm}$$

volt hátra.

d) I. megoldás. A Hanna által leúszott hosszok számát jelölje n, ekkor Hugó $n+4$, Ödön pedig $n-4$ hosszt úszott. Ekkor Hugó $20(n+4)$, Hanna $33\frac{1}{3}n$, Ödön pedig $50(n-4)$ métert úszott. A feladat szövege szerint ez a három távolság számtani sorozatot alkot, így

$$50(n-4)+20(n+4)=2\cdot 33\frac{1}{3}n.$$

Innen $3\frac{1}{3}n=120$, azaz $n=36$.

Hugó 40, Hanna 36, Ödön 32 hosszt úszott, az általuk leúszott távolságok pedig rendre 800, 1200 és 1600 méter. Ezek a távolságok valóban számtani sorozatot alkotnak.

II. megoldás. A Hanna által leúszott távolságot m-mel, a számtani sorozat differenciáját d-vel jelölve megoldandó a

$$\left.\begin{aligned} 20(m+4)&=m-d\\ 33\frac{1}{3}m&=m\\ 50(m-4)&=m+d \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer. Az első egyenlet ötszöröséből kivonva a második egyenlet háromszorosát:

$$400=2m-5d. \tag{1}$$

A harmadik egyenlet kétszereséből kivonva a második egyenlet háromszorosát:

$$-400=-m+2d. \tag{2}$$

Az (1) egyenlethez hozzáadva a (2) egyenlet kétszeresét $d=400$ adódik, amit visszahelyettesítve (1)-be kapjuk, hogy $m=1200$, majd ezeket az értékeket az eredeti egyenletrendszer valamelyik egyenletébe helyettesítve $n=36$ adódik.

Hugó 40, Hanna 36, Ödön 32 hosszt úszott, az általuk leúszott távolságok pedig rendre 800, 1200 és 1600 méter. Ezek a távolságok valóban egy (400 differenciájú) számtani sorozatot alkotnak.

9. *Egy duatlon verseny rajtja egy egyenes tengerparton van, célja a vízben. Egyik lehetőség a táv teljesítésére, hogy először* 4 km*-t fut a versenyző a parton, majd* 90 *fokkal elfordulva* 1 km*-t úszik a tengerben. Azonban megengedett bármikor letérni a futópályáról és úszni kezdeni a cél felé.*

a) Mennyi idő alatt ér célba Dénes, akinek a tengerparti homokban futva 8 km/h, *a vízben úszva* 1,5 km/h *a sebessége, és* 3,5 km *lefutása után kezd el úszni a cél felé?*

b) Juli sebessége futva 6 km/h, *úszva* 2 km/h. *A* 4 km-es *futópálya vége előtt hány méterrel érdemes úszni kezdenie ahhoz, hogy a lehető leggyorsabban teljesítse a távot? Mekkora ez az idő?* *(16 pont)*

Megoldás. *a)* Dénesnek úszva $s_{\text{ú}}=\sqrt{1^2+0{,}5^2}\approx 1{,}118$ km-t kell megtennie, ehhez $t_{\text{ú}}=\dfrac{s_{\text{ú}}}{v_{\text{ú}}}=\dfrac{1{,}118}{1{,}5}\approx 0{,}745$ órára van szüksége. A 3,5 km lefutásához szükséges idő $t_{\text{f}}=\dfrac{s_{\text{f}}}{v_{\text{f}}}=\dfrac{3{,}5}{8}\approx 0{,}438$ óra.

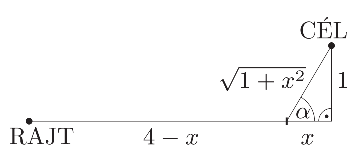
A teljes táv megtételéhez szükséges idő $t=t_{\text{f}}+t_{\text{ú}}\approx 1{,}183$ óra, azaz kb. 71 perc.

b) I. megoldás. Jelölje x azt a (kilométerben mért) távolságot, amennyivel a 4 km-es futópálya vége előtt Juli bevág a vízbe. Ekkor a teljes táv megtételéhez szükséges idő

$$t=t_{\text{f}}+t_{\text{ú}}=\frac{4-x}{6}+\frac{\sqrt{1^2+x^2}}{2}.$$

Vizsgáljuk a $t(x)$ függvényt a $(0;4)$ intervallumon. A függvénynek minimumhelye ott lehet, ahol a deriváltja 0.

$$t'(x)=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x=\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{6}.$$



Ha $t'(x)=0$, akkor

$$\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{6},\quad \text{azaz}\quad 6x=2\sqrt{1+x^2}\,.$$

Négyzetre emelve $36x^2 = 4\left(1+x^2\right)$, ahonnan $x^2 = \dfrac{1}{8}$, tehát (figyelembe véve, hogy $x > 0$) $x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}354$ km.

$$t'(x) = \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} - \frac{1}{6},$$

s innen látszik, hogy x növelésével a gyök alatti törtkifejezés nevezője nő, a törtkifejezés értéke csökken, így a gyök alatti kifejezés értéke nő. A deriváltfüggvény tehát $x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$-ben negatívból pozitívba megy át, így az adott helyen valóban minimuma van a t függvénynek. (Behelyettesítve azt kapjuk, hogy $t(0)$ és $t(4)$ nagyobb, mint $t\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$).

Tehát a futópálya vége előtt kb. 354 méterrel érdemes Julinak úszni kezdenie. A táv megtételéhez szükséges idő ekkor

$$t\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{4 - \frac{1}{2\sqrt{2}}}{6} + \frac{\sqrt{1+\frac{1}{8}}}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{12\sqrt{2}} + \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{3} + \frac{8}{12\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{3} \approx 1{,}138 \text{ óra, azaz kb. 68 perc.}$$

II. megoldás. Jelölje α azt a szöget, amit az optimális irányú úszás a futópályával bezár. Ekkor az úszás megkezdésekor a futópályából hátralevő szakasz hossza $\operatorname{ctg}\alpha$, az úszva megteendő táv pedig $\dfrac{1}{\sin\alpha}$. A teljes táv megtételéhez szükséges idő

$$t = t_{\mathrm{f}} + t_{\mathrm{ú}} = \frac{4 - \operatorname{ctg}\alpha}{6} + \frac{1}{2\sin\alpha}.$$

Vizsgáljuk a $t(\alpha)$ függvényt a $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumon. A függvénynek minimumhelye ott lehet, ahol a deriváltja 0.

$$t'(\alpha) = \frac{1}{6\sin^2\alpha} - \frac{\cos\alpha}{2\sin^2\alpha} = \frac{1 - 3\cos\alpha}{6\sin^2\alpha}.$$

Ha $t'(\alpha) = 0$, akkor $1 - 3\cos\alpha = 0$, azaz $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, tehát $\alpha_{\min} \approx 70{,}53^\circ$ (1,231 radián).

Mivel α növelésével $\cos\alpha$ csökken, a deriváltfüggvény tehát ebben a pontban negatívból pozitívba megy át, így az adott helyen valóban minimuma van a t függvénynek. (Behelyettesítve azt kapjuk, hogy $t(0)$ és $t\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ nagyobb, mint $t(70{,}53^\circ)$).

Tehát a futópálya vége előtt kb. $\operatorname{ctg} 70{,}53^\circ \approx 0{,}354$ kilométerrel érdemes Julinak úszni kezdenie.

A táv megtételéhez szükséges idő ekkor $t(\alpha_{\min}) \approx 1{,}138$ óra, azaz kb. 68 perc.