

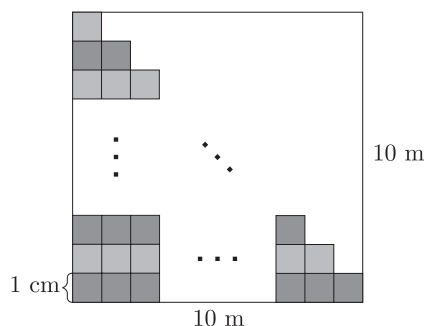
I. rész

1. Egy 18 fős csoportban a fizika tantárgy átlaga két tizedesre kerekítve 3,72 volt. Tudjuk, hogy senki sem bukott meg.

- Legfeljebb hányan kaphattak kettest?
- Biztos-e, hogy volt valakinek ötöse?
- Az osztály másik csoportjába 16 diák jár, akik fizika átlaga 4,12 volt. Mekkora az osztály átlaga fizikából? (13 pont)

2. Egy irodaház egyik oldalfalának díszítésére pályázatot írtak ki. Az oldalfal alakja 10 m oldalhosszúságú négyzet.

A győztes pályázó 1 cm oldalhosszúságú, négyzet alakú, piros, illetve kék színű kerámia lapocskákból rakott ki hézagmentesen egy mintát az *ábra* szerint úgy, hogy a talaj szintjén kezdődő legelső sort teljesen kitöltötte a lapocskákkal. Ha felfelé haladunk, minden egyes rákövetkező sorba eggyel kevesebb lapocskka került. Minden sorba csak azonos színű lapocskák kerültek, és az egymással érintkező sorok különböző színűek voltak.



Vannak-e ennek a kerámia mintának olyan, legalább 10 sormagasságú részei, részmintái, melyek közvetlenül egymás alatt lévő, teljes sorokból állnak, a bennük lévő lapocskák száma 2016, valamint az alsó és felső sora azonos színű? Ha igen, adjuk meg, hogy felülről számítva hányadik sornál kezdődnek, és hány sor tartozik hozzájuk. (11 pont)

3. Az ABC háromszög két csúcsának koordinátái: $A(3; -2)$ és $B(3; 6)$. Az A csúcsnál lévő α szög felezője a BC oldalt az $F_\alpha \left(\frac{8 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}; 6 \right)$ pontban metszi.

Határozzuk meg a C csúcs koordinátáinak pontos értékét.

b) Legyen az ABP háromszög olyan, hogy az A és B csúcs egyezzen meg az a)-beli A és B ponttal, és oldalai mérőszámának négyzetösszege egyezzen meg területe mérőszámának hétszeresével.

Határozzuk meg a feltételnek megfelelő P pontok mértani helyét, ha tudjuk, hogy a P pont abszcisszája nagyobb a másik két csúcs abszcisszájánál. (14 pont)

4. a) Legyen az $\{a_n\}$ sorozat első tagja 1, a második tagja pedig 2. A sorozat elemeit a harmadik tagtól kezdve a következő képzési szabály (rekurzió) adja meg:

$$a_{n+2} := \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}, \quad \text{ha } n \geq 1.$$

Határozzuk meg a számsorozat 2016. elemét.

b) A Heuréka Alapítvány támogatni szeretné a matematikából tehetséges diákokat. Ennek érdekében a támogatók által adományozott pénzt 2016. január 1-jén évi 3,2%-os, állandó kamatozású folyószámlán helyezte el. A pénzügyintézet minden év utolsó napján írja jóvá a kamatokat, az alapítvány pedig az első év lejártától kezdve minden év január 1-jén utalja a támogatást a fiataloknak. Az évente nyújtott támogatás összege mindig az első év végén kamatként kapott összeg két és félszerese.

Mikor tud az alapítvány utoljára a szabályzatában lefektetett módon teljes támogatást fizetni, ha nincsenek egyéb bevételei és kiadásai sem? (13 pont)

II. rész

5. a) Egy hegység öt leglátogatottabb csúcsán van egy-egy kilátó. Minden kilátóból bármelyik kilátóba közvetlenül eljuthatunk libegővel vagy gyalog, de mindig csak az egyik módon. András, a helyszínt nem ismerve azt állította, hogy lehet olyan, mindegyik kilátót érintő kirándulást szervezni, amelyen csak az egyik módon közlekedünk.

Igaza van Andrásnak?

b) Az A városból 60 km/h sebességgel indul el egy személyvonat a B városba. A személyvonat után indul valamivel később egy gyorsvonat ugyanezen az útvonalon, másfélszeres sebességgel. A gyorsvonat így a személyvonatot éppen a B városban érné utol. Sajnos a személyvonat műszaki hiba miatt útjának kétharmad részétől csak az eredeti sebességének felével tud haladni, így a két vonat már a B város előtt 45 km -re lévő C város pályaudvarán találkozik.

Milyen messze van C város az A várostól, ha a vonatok sebességét az egyes szakaszokon állandónak tekintjük? (16 pont)

6. a) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{24+x-10\sqrt{x-1}} = 5.$$

b) Mely valós számok esetén lesz a $\sin(2x)$ mértani közepe a $\sin(x)$ -nek és a $\cos(x)$ -nek, ha mindhárom kifejezés nemnegatív értékeket vesz fel? (16 pont)

7. Egy kistermelő földjén nagyon sok görögdinnye termett. Kiválasztott közülük 33 db egyforma, 28 cm átmérőjű gömb alakú termést, és a közeli piacra vitte értékesíteni.

a) A termelő az utánfutójában egy rétegben szeretne volna elhelyezni a dinnyéket. Bármilyen szorosan is pakolta, nem sikerült. Hány db dinnyét kellett a gépkocsi hátsó ülésére betenni, ha az utánfutóra a lehető legtöbb dinnyét tette egy rétegben, és az utánfutó belső méretei: $200 \text{ cm} \times 130 \text{ cm}$?

b) A piacon 85 cm magasak a standok, ahová az árusok kipakolhatják az árut. A gazda kiszámolta, hogy egymás mellé három olyan „piramist” (3. ábra) tud építeni a dinnyékből, amelyeknél az alsó szintre hét (1. ábra), a második szintre három (2. ábra), a harmadik szintre pedig egy dinnyét (3. ábra) helyez szorosan egymás mellé, illetve egymásra. Amikor a vevőkkel tárgyal a dinnyehalmok mögül, szereti, ha semmi sem zavarja a beszélgetést és a fizetést. Ezért nem akarta azt, hogy a dinnyékből épített bármelyik rakás csúcsa a földtől számítva 150 cm -nél magasabban legyen. Teljesült-e ez a kívánság a fent említett elrendezés esetén? (16 pont)



1. ábra



2. ábra



3. ábra

8. Adott az $f:]-1; 6] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - |x^2 - 6x + 5|$ függvény.

a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját a megadott értelmezési tartományban.

i) Adjuk meg az f függvény értékkészletét.

ii) Határozzuk meg algebrai úton az f zérushelyeit.

b) Határozzuk meg az f függvény grafikonja 4 abszcisszájú pontjába húzható érintő egyenes iránytangensét és egyenletét.

c) Toljuk el az $y = 2x^2 - 10x + 8$ függvény grafikonját a $\mathbf{v}(-2,5; 4,5)$ vektorral.

i) Adjuk meg az így kapott függvény hozzárendelési szabályát.

ii) Számítsuk ki az eltolt grafikon és az $y = 4,5$ egyenletű egyenes által bezárt síkrész területét. (16 pont)

9. a) A Lutri Lottón a 75-nél nem nagyobb pozitív egész számok közül húznak ki 5-öt úgy, hogy a kihúzott számokat nem teszik vissza, és a húzási sorrend nem számít. Egy szelvénnel akkor lehet nyerni, ha rajta legalább két találatot értek el. Szerencsés Szilárd 10 szelvénnel játszik a Lutri Lottón. Ha a szelvényeket egymástól függetlenül tölti ki, mennyi annak a valószínűsége, hogy

1. nyer;

2. legalább három szelvényen két találata lesz?

b) Szilárdnak három húga van: Szabina, Szilvia és Szonja. A három lány (Szilárddal együtt) a következő játékot játssza: megkérik édesanyjukat, hogy mondjon egy –találomra kiválasztott – háromjegyű számot. Ha az adott számban az egyik számjegy a másik kettő számtani közepe, akkor Szabina, ha az egyik számjegy a másik kettő mértani közepe, akkor Szilvia, ha pedig egyik feltétel sem teljesül, akkor Szonja kap egy cukorkát Szilárdtól.

Igaz-e, hogy Szonja nyerési esélye több, mint hatszorosa Szabina nyerési esélyének?

(16 pont)