1. *Vívásban az nyer egy asszót, aki hamarabb ér el 15 találatot. Tegyük fel, hogy A és B küzdelmében (az asszón belül bármikor) p valószínűséggel A, $q = 1-p$ valószínűséggel pedig B szerzi meg a következő találatot. (Ketten egyszerre sosem érnek el találatot.)*

Tegyük fel, hogy egy asszóban A már $14-k$, B pedig $14-\ell$ találatot szerzett (ahol k és ℓ nemnegatív, 15-nél kisebb egészek), és A újabb találatot ér el. Mennyivel növekedett ezáltal annak a valószínűsége, hogy A nyeri végül az asszót?

Megoldás. Jelölje $P_{k,\ell}$ az A vívó győzelmének valószínűségét a feladatban leírt állásnál, $p_{k,\ell}$ pedig a kérdezett növekményt. A teljes valószínűség tétele miatt $P_{k,\ell} = p \cdot P_{k-1,\ell} + q \cdot P_{k,\ell-1}$, amit átrendezve $p_{k,\ell} = P_{k-1,\ell} - P_{k,\ell} = q(P_{k-1,\ell} - P_{k,\ell-1})$ adódik.

Feltételezhetjük, hogy A és B 29 találatig vívják az asszót, hisz ez a győztes kilétét nem változtatja meg. Így $P_{k-1,\ell}$ annak a valószínűsége, hogy a hátralévő $k+\ell$ találat közül A legalább k találatot szerez, míg $P_{k,\ell-1}$ annak a valószínűsége, hogy a hátralévő $k+\ell$ találat közül A legalább $k+1$ találatot szerez. Ezért a $p_{k,\ell} = P_{k-1,\ell} - P_{k,\ell-1}$ különbség annak a valószínűsége, hogy A a hátralevő $k+\ell$ lehetőségből pontosan k találatot szerez, azaz $p_{k,\ell} = \binom{k+\ell}{k} p^k q^{\ell+1}$. □

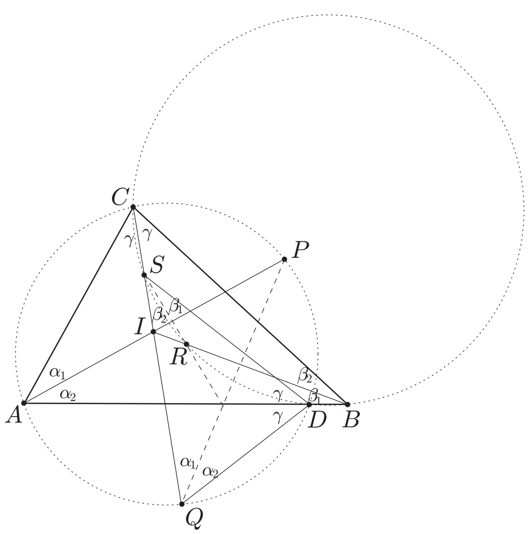
2. *A D pont az ABC háromszög AB oldalán, az I pont pedig az ACB szög felezőjének a háromszög belsejébe eső szakaszán helyezkedik el. Az AI és a CI egyenesek az ACD kört másodszor rendre a P és Q pontokban metszik. Hasonlóan, a BI és a CI egyenesek a BCD kört másodszor rendre az R és S pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy ha $P \neq Q$ és $R \neq S$, akkor az AB, PQ és RS egyenesek vagy egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak egymással.*

Megoldás. Legyen

$$\alpha_1 = IAC\sphericalangle, \quad \alpha_2 = BAI\sphericalangle, \quad \beta_1 = IBA\sphericalangle, \quad \beta_2 = CBI\sphericalangle, \quad \gamma = ICB\sphericalangle = ACI\sphericalangle.$$

Írjuk fel a Ceva-tétel trigonometrikus alakját az ABC háromszögre és az I pontra:

$$\frac{\sin IAC\sphericalangle}{\sin BAI\sphericalangle} \cdot \frac{\sin IBA\sphericalangle}{\sin CBI\sphericalangle} \cdot \frac{\sin ICB\sphericalangle}{\sin ACI\sphericalangle} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma} = 1.$$



A kerületi szögek tételéből (irányított, azaz modulo 180° szögekkel):

$$\begin{aligned}
PQS\sphericalangle &= PQC\sphericalangle = PAC\sphericalangle = IAC\sphericalangle = \alpha_1,\\
DQP\sphericalangle &= DAP\sphericalangle = BAI\sphericalangle = \alpha_2,\\
RSD\sphericalangle &= RBD\sphericalangle = IBA\sphericalangle = \beta_1,\\
QSR\sphericalangle &= CSR\sphericalangle = CBR\sphericalangle = CBI\sphericalangle = \beta_2,\\
ADQ\sphericalangle &= ACQ\sphericalangle = ACI\sphericalangle = \gamma,\\
SDA\sphericalangle &= SDB\sphericalangle = SCB\sphericalangle = ICB\sphericalangle = \gamma.
\end{aligned}$$

Végül alkalmazzuk a Ceva-tétel (trigonometrikus alakjának) megfordítását a DSQ háromszögre. Mivel

$$\frac{\sin ADQ\sphericalangle}{\sin SDA\sphericalangle} \cdot \frac{\sin RSD\sphericalangle}{\sin QSR\sphericalangle} \cdot \frac{\sin PQS\sphericalangle}{\sin DQP\sphericalangle} = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = 1,$$

a $DA = AB$, RS és PQ egyenesek egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak egymással. □

Megjegyzés. Láttuk, hogy az ABC háromszög hasonló a QSD háromszöghöz. Legyen I' az ABC háromszög I pontjának megfelelője a QSD háromszögben. A fenti bizonyítás kulcsa az, hogy a QSD háromszögben az I' izogonális konjugáltja éppen az AB, PQ és RS egyenesek közös pontja.

3. *Legyen Q az olyan n tagú sorozatok halmaza, amelyeknek minden tagja 0 vagy 1. Legyen A a Q-nak egy 2^{n-1} elemű részhalmaza. Mutassuk meg, hogy legalább 2^{n-1} olyan (a, b) pár van, amelyre $a \in A$, $b \in Q \setminus A$, továbbá az a és b sorozatok csak egyetlen tagban térnek el egymástól.*

I. megoldás. A feladatban megfogalmazottnál erősebb állítást bizonyítunk. Legyen A a Q-nak egy *tetszőleges* részhalmaza, és legyen $B = Q \setminus A$. Ekkor az olyan (a, b) párok száma, amelyekben $a \in A$, $b \in B$, továbbá az a és b sorozatok csak egyetlen tagban térnek el egymástól, legalább $\min\big(|A|, |B|\big)$. Világos, hogy a fenti állítás $|A| = 2^{n-1}$ esetén éppen a kitűzött feladat.

A fent megfogalmazott állítást n szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $n = 1$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz, és lássuk be $(n+1)$-re. Legyenek tehát az A halmaz elemei bizonyos $n+1$ tagú 0/1-sorozatok, B pedig álljon a többi $n+1$ tagú 0/1-sorozatból. Feltehetjük, hogy $|A| \le |B|$, mert ellenkező esetben felcserélhetjük A és B szerepét. Legyen az A-beli, 0-ra végződő sorozatok száma x, az 1-re végződőké y. Ekkor tehát $x + y = |A| \le 2^n$. Feltehetjük, hogy $x \ge y$. Ekkor $y \le 2^{n-1}$.

A feladatban leszámlálandó (a, b) párok négyfélék lehetnek aszerint, hogy mi a, illetve b utolsó tagja.

1. Olyan párokból, ahol ez a két utolsó tag 1, az indukciós feltevés szerint legalább $\min(y, 2^n - y) = y$ darab van.

2. Olyanokból, ahol ez a két utolsó tag 0, az indukciós feltevés szerint legalább $\min(x, 2^n - x) \ge y$ darab van.

3. Olyanokból, ahol a utolsó tagja 0, b-é pedig 1, legalább $x - y$ darab van, hiszen az x darab A-beli, 0-ra végződő sorozat között legfeljebb y olyan lehet, amelynek utolsó tagját 1-re változtatva ismét A-beli sorozatot kapunk.

4. A negyedik fajta párból legalább 0 darab van.

A vizsgált párok száma tehát legalább $y + y + (x - y) + 0 = x + y = |A|$. Ezzel az indukciós lépést igazoltuk, a fent megfogalmazott állítás bizonyítását befejeztük. $\square$

II. megoldás. Az I. megoldásban igazolt állításnál egy erősebbet bizonyítunk az alábbiakban.

Azt mondjuk, hogy a Q-beli $q_1, q_2, \ldots$ sorozatok *monoton sort* alkotnak, ha minden értelmes i-re q_i és q_{i+1} egyetlen tagban tér el egymástól, továbbá q_i és q_{i+1} eltérése korábban van, mint a q_{i+1} és q_{i+2} eltérése. Világos például, hogy egy monoton sor hossza legfeljebb $n+1$ lehet, de az is könnyen látható, hogy tetszőleges $x, y \in Q$ sorozatokra pontosan egy olyan monoton sor létezik, amely x-szel kezdődik és y-ra végződik.

Legyen most $A \subseteq Q$, $B = Q \setminus A$, és tegyük fel, hogy $|A| \le 2^{n-1}$. Az iménti megfigyelésünk szerint az olyan monoton sorok száma, amelyek A-beli sorozatból indulnak és B-beliben érnek véget, pontosan $|A| \cdot |B|$. Világos, hogy minden ilyen $q_1, q_2, \ldots$ monoton sorhoz van legalább egy olyan i index, amelyre $q_i \in A$ és $q_{i+1} \in B$.

Most tegyük fel, hogy az $a \in A$ és $b \in B$ sorozatok pontosan egy (mondjuk az i-edik) tagban térnek el. Az olyan monoton sorok száma, amelyek az a és a b sorozatot is tartalmazzák, pontosan 2^{n-1}, hiszen minden ilyen monoton sort egyértelműen meghatároznak azok a helyek, amelyeken található tagokban a sorban egymást követő sorozatok eltérnek. Az i-dik hely bizonyosan ilyen eltérés (az egymást követő a és b sorozatok miatt), a fennmaradó $n-1$ hely mindegyikéről pedig egymástól függetlenül eldönthetjük, hogy legyen-e a monoton sorban két egymást követő sorozat, amelyek ott térnek el, vagy ne.

Ezek szerint a feladatban leírt (a, b) párok számának 2^{n-1}-szerese nem lehet kisebb $|A| \cdot |B|$-nél, azaz az A-ból B-be vezető monoton sorok számánál. Tehát a keresett (a, b) párok száma legalább

$$|A| \cdot \frac{|B|}{2^{n-1}} \ge |A| \cdot \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} = |A|.$$

A bizonyítandó állítás innen közvetlenül adódik az $|A| = 2^{n-1}$ feltételből. $\square$

Megjegyzések. 1. A II. megoldás gondolatmenete Molnár-Sáska Zoltán megoldásából származik. Lényegében ugyanez az érvelés rekonstruálható Matolcsi Dávid dolgozatából is.

2. Ahogy a II. megoldásban, tegyük fel ismét, hogy $A \subseteq Q$, $B = Q \setminus A$, valamint $|A| \le 2^{n-1}$. A II. megoldásból könnyen levezethető, hogy az olyan (a, b) párok száma, amelyek csak egy tagban térnek el és $a \in A$, illetve $b \in B$, pontosan akkor egyenlő $|A|$-val, ha $A = \emptyset$ vagy ha $|A| = 2^{n-1}$ és A mindazon sorozatok halmaza, amelyeknek egy konkrét tagja rögzített, a többit pedig az összes lehetséges módon választjuk.

3. A kitűzött feladat lényegében ekvivalens azzal az ismert ténnyel, hogy a hiperkocka ún. Cheeger-száma 1-gyel egyenlő.