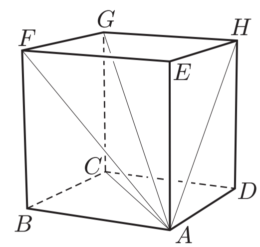
A telitalálatos szelvény:

$$X, X, X, \quad 2, 1, 2, \quad 2, X, 2, \quad X, X, X, \quad 1, X.$$

A legtöbb (11) találatot *Williams Kada* (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn., 11. évf.) érte el.
Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a feladatok megoldásához.

1. Legyen a kocka egy lapja $ABCD$, az ennek csúcsaiból kiinduló harmadik élek AE, BF, CG, DH és a kiszemelt csúcs A. A szimmetria miatt elég az AB és az AC élekkel bezárt szögeket vizsgálni.



Az AB éllel az AC és az AF él 45°-os, míg az AD, AE és az AH él 90°-os szöget zár be. Végül az AB és az AG él által bezárt szög megegyezik az 1 és $\sqrt{2}$ befogójú derékszögű háromszög nagyobbik szögével.

Az AC él az AB és az AD éllel 45°-os, az AE éllel 90°-os szöget zár be. Mivel a CAF és a CAH háromszög is szabályos, így az AF és az AH éllel bezárt szög egyaránt 60°. Végül az AC és az AG élek által bezárt szög megegyezik az 1 és $\sqrt{2}$ befogójú derékszögű háromszög kisebbik szögével.

Tehát 5 különböző nagyságú szöget kapunk.

2. Mivel

$$a = 1\ \frac{\text{fényév}}{\text{év}^2} = \frac{c \cdot \text{év}}{\text{év}^2} = \frac{3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{365 \cdot 24 \cdot 3600\ \text{s}} = 9{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx g,$$

egy m tömegű űrhajós majdnem pontosan a földi mg súlyával megegyező nagyságú „tehetetlenségi erőt” érez.

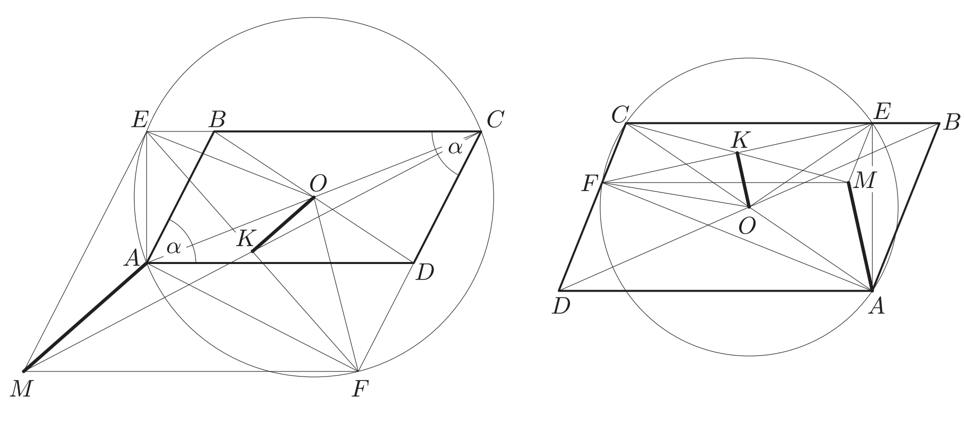
3. Készítsünk táblázatot.

Hány jegyűek	Mitől	Meddig	Hány db	A felhasznált jegyek száma	
				ebben a csoportban	eddig összesen
1	1^2	3^2	3	3	3
2	4^2	9^2	6	12	15
3	10^2	31^2	22	66	81

A 100-as sorszámú számjegy a 4 jegyűekkel betöltött $100 - 81 = 19$-edik helyen áll. Mivel $19 = 4 \cdot 4 + 3$, így a kérdéses számjegy a $(32 + 4)^2 = 1296$ harmadik jegye, vagyis a 9-es.

4. Ha a z tengely függőlegesen felfelé mutat és a kezdősebesség nagysága $v_0 = \sqrt{2gh}$, akkor a parabolák csúcspontjainak mértani helyét az $x^2 + y^2 + (2z - h)^2 = h^2$ egyenlet írja le. Ez egy lencseszferoidot határoz meg, melynek féltengelyei h, h, $\frac{1}{2}h$.

5. Az AEF háromszög ME magasságvonala merőleges AF-re, tehát párhuzamos CD-vel. Ugyanígy $MF \parallel CB$, tehát az $MECF$ négyszög paralelogramma (az *ábra* két változatában $BAD\sphericalangle$ hegyesszög, illetve tompaszög).



Jelöljük az $MECF$ és az $ABCD$ paralelogramma középpontját K-val, illetve O-val. KO az ACM háromszög AM-mel párhuzamos középvonala, tehát $AM = 2 \cdot KO$.

E és F rajta vannak az AC Thalész-körén, így $OE = OF = AC/2$, és mivel K az EF-et is felezi, azért KO az OEF egyenlő szárú háromszög magassága. Ebből

$$AM^2 = 4 \cdot KO^2 = 4\left(OE^2 - KE^2\right) = AC^2 - EF^2.$$

6. Ha a sötét mezők feletti kockák jó szigetelők ($\varrho_1 \to \infty$), akkor az egész tábla is szigetelőként viselkedik ($\varrho_0 \to \infty$), mert a véges vezetőképességű kockák csak élek (nulla nagyságú „felületek”) mentén érintkeznek; az (X) válasz tehát nem lehet jó. Azt is könnyen beláthatjuk, hogy ha a „sötét” kockák jó vezetők ($\varrho_1 \to 0$), akkor az egész tábla is jó vezetőként viselkedik, vagyis $\varrho_0 \approx 0$). Érvelésünk: a fémlapokra adott feszültséget kapcsolva a jól vezető kockák egymással érintkező éleinek közelében véges potenciálkülönbség, tehát nagy elektromos térerősség alakul ki, emiatt a véges ϱ_2 fajlagos ellenállású kockák éleinek közelében nagyon nagy áram folyik. Ezek szerint az (1)-es válasz is hibás, tehát a (2)-es válasznak kell helyesnek lennie. Valóban, megmutatható (ha nem is túl egyszerűen), hogy az általános esetben mindig teljesül: $\varrho_0 = \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}$.

7. A második egyenletből $x = 5y - 11$. Mivel x feltételünk szerint negatív, az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $y < \dfrac{11}{5}$. Az y-ra vonatkozó kikötésből $y = 2$ vagy $y = 1$ adódik, s ezért $x = -1$ vagy $x = -6$.

Az első egyenletből az $x = -1$, $y = 2$ esetben $m = 4$-et kapunk, míg a másik esetben a kapott m érték nem egész szám.

8. Bebizonyítható, hogy (lineáris) optikai eszközökkel a felmelegített test hőmérséklete nem lehet magasabb, mint a Nap felszíni hőmérséklete. Ellenkező esetben (leegyszerűsített érveléssel) nem a Nap melegítené a testet, hanem a test a Napot. Ha viszont a Napból érkező energiát pl. akkumulátorokban elraktározzuk, majd azzal hevítünk fel egy testet, az elérhető hőmérsékletnek nincs elvi felső korlátja. Jól mutatja ezt a Nagy Hadronütköztető, amelyben elektromos energia felhasználásával nehéz atommagokat gyorsítanak fel a fénysebességhez közeli sebességekre, majd a magok összeütközése után rövid időre igen magas hőmérsékletű anyagot állítanak elő.

9. Egy kis kockának legfeljebb három lapja lehet piros, ezek a sarokkockák. Mivel ezek a legjobban festett kockák, nincs náluk jobban festett szomszédjuk, ez a 8 kocka a *b*) szempont szerint ugyanabba az osztályba tartozik.

A 0, 1 és 2 piros lappal rendelkező kockák között $n \geq 5$ esetén találhatunk olyat, amelynek összes szomszédján vele megegyező számú piros lap van, és olyat is, amelynek van jobban festett szomszédja.

A nem üres osztályok száma tehát $1 + 3 \cdot 2 = 7$.

10. Nem az elektromos potenciál nagyságát, hanem annak egységnyi hosszra eső változási ütemét (vagyis az elektromos térerősséget) érzékelik az űrhajósok. A földi potenciál értékét nem „viszi magával” az űrhajó, hiszen a potenciál nem megmaradó mennyiség, hanem az utazás során fokozatosan változik, növekszik. A helyzet mechanikai megfelelője: egy felhőkarcoló legfelső emeletének megközelítése sem veszélyes amiatt, hogy ott sokkal nagyobb a helyzeti energiánk, mint a földszinten.

11. Az összes esetek száma 6^n. A kedvező esetek száma $n \cdot 5^{n-1}$.

A keresett valószínűség n függvényében:

$$P(n) = \frac{n \cdot 5^{n-1}}{6^n} = \frac{n}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

Látszik, hogy ez $n = 5$ és $n = 6$ esetén megegyezik, tehát az (X) válasz a jó.

Be is bizonyítjuk, hogy ekkor van a maximum. Tekintsük $P(n+1)$ és $P(n)$ hányadosát:

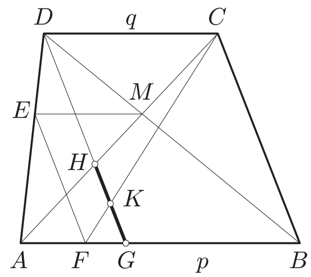
$$q(n) = \frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5n+5}{5n+n}.$$

Látjuk, hogy $q(5) = 1$, vagyis a $P(5)$ és $P(6)$ valószínűségek egyenlők. Továbbá ha $n < 5$, akkor $q(n) > 1$, azaz $P(n) < P(n+1)$, végül ha $n > 5$, akkor $q(n) < 1$, tehát $P(n+1) < P(n)$.

12. A hőtan második főtétele szerint nem létezik olyan hőerőgép, aminek a hatásfoka meghaladná a Carnot-körfolyamat $\Delta T/T_1$ hatásfokát. Mivel ez utóbbi $\Delta T \to 0$ határesetben nullához tart, az (1)-es és (2)-es válasz nem lehet helyes.

Megjegyzés. Érdekes, hogy az a naiv érvelés, miszerint egy adott hőtágulási együtthatójú és hőkapacitású testre W is és Q_1 is egyenesen arányos ΔT-vel (tehát η független a hőmérsékletkülönbségtől) *hibás,* mert sérti a második főtételt. Ez a hibás megoldás az I. Nemzetközi Fizikai Diákolimpián (1967, Varsó), majd később több példatárban is felbukkant, és csak 2015-ben mutatott rá két olasz fizikus, *Giacomo De Palma* és *Mattia C. Sormani* annak tarthatatlanságára.

13. Egy jó *ábrát* készítve „látszik”, hogy az (1) lehet a helyes válasz.



Jelöljük a CF és a DG egyenesek metszéspontját K-val, a trapéz átlóinak metszéspontját M-mel, továbbá legyen $AB = p$ és $DC = q$, ahol $p > q$.

A KGF és CBF háromszögek hasonlók egymáshoz, úgyszintén a HGA, CBA háromszögek is. Ezek alapján

$$HG : KG = \left(\frac{AG}{AB} \cdot CB\right) : \left(\frac{FG}{FB} \cdot CB\right) = \frac{AG}{FG} : \frac{AB}{FB}.$$

Mivel $AGD\triangle \sim AFE$, $AME\triangle \sim ACD$ és $ABM\triangle \sim CDM$, azért

$$\frac{AF}{FG} = \frac{AE}{ED} = \frac{AM}{MC} = \frac{AB}{DC} = \frac{p}{q}.$$

$AG = AF + FG = p - q$, ezért ebből

$$AF = \frac{p}{p+q} \cdot AG \quad \text{és} \quad FG = \frac{q}{p+q} \cdot AG, \quad \text{vagyis} \quad \frac{AG}{FG} = \frac{p+q}{q}.$$

Másrészt

$$FB = FG + GB = \frac{q}{p+q} \cdot (p-q) + q = \frac{2pq}{p+q}, \quad \text{amiből} \quad \frac{AB}{FB} = \frac{p+q}{2q}.$$

Tehát $HG : KG = \dfrac{AG}{FG} : \dfrac{AB}{FB} = 2.$

13 + 1. A nulla nyugalmi tömegű neutrínók (sokáig ilyennek vélték ezeket a részecskéket) csak egyféle „csavarodási iránnyal” rendelkeznek, vagy „jobbkezes”, vagy „balkezes” állapotúak. A véges nyugalmi tömegű, feles spinű részecskék (ilyen például az elektron is) kétféle spinállapotban fordulhatnak elő (ezt fogalmazza meg a Pauli-elv). A legfrissebb (2015-ben fizikai Nobel-díjjal is elismert) mérési eredmények szerint a háromféle neutrínó közül legalább kettőnek nem nulla a nyugalmi tömege, tehát az összes lehetséges spinállapot $2 + 2 + 1 = 5$, de esetleg akár 6 is lehet.