I. rész

1. *Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét közelítő értékek használata nélkül:*

$$a = \sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ, \qquad b = \frac{5^{\lg 20}}{20^{1+\lg 5}},$$
$$c = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

(*4 + 5 + 4 pont*)

Megoldás. *a*) $\sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2\sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$.

b) **I. megoldás.** $\lg b = \lg 20 \cdot \lg 5 - (1+\lg 5)\lg 20 = \lg 1/20$. Az $f(x) = \lg x$ függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért $b = 1/20$.

II. megoldás. Használjuk fel, hogy ha a, b, c pozitív és $b \neq 1$, akkor $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$:

$$b = \frac{5^{\lg 20}}{20^{1+\lg 5}} = \frac{5^{\lg 20}}{20 \cdot 20^{\lg 5}} = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

c) Gyöktelenítsük a nevezőket:

$$c = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \ldots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99} = \sqrt{100} - \sqrt{1} = 9.$$

2. *Egy háromszögben két oldal hosszának különbsége $a - b = 4$ cm, a velük szemközti szögek $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 40^\circ$. Mekkora a háromszög területe?* (*12 pont*)

I. megoldás. Szinusztétellel:

$$\frac{b+4}{b} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 40^\circ}.$$

Ebből $b \approx 11{,}52$ cm, $a \approx 15{,}52$ cm,

$$t = \frac{1}{2}ab\sin 80^\circ \approx 88{,}04\ \text{cm}^2.$$

II. megoldás. Tangenstétellel:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} 50^\circ}{\operatorname{tg} 10^\circ},$$

így $a + b = 27{,}04$ cm.

Ebből $a = 15{,}52$ cm, $b = 11{,}52$ cm, $t = \frac{1}{2}ab\sin 80^\circ \approx 88{,}04\ \text{cm}^2$.

III. megoldás. Legyen D a BC oldalnak az a pontja, amelyre $DC = AC$. Ekkor $DB = 4$ cm, és az ADB háromszög szögei 10°, 40°, 130°. Az AB oldal szinusztétellel: 17,65 cm.

$$t = c^2 \sin 60^\circ \cdot \frac{\sin 40^\circ}{2\sin 80^\circ} \approx 88{,}05\ \text{cm}^2.$$

3. *Egy matematikai teszt megírásában egy középiskola 100 tanulója vett részt, és az átlagpontszámuk 100. Az alsóévesek száma 50%-kal több, mint a felsőéveseké, a felsőévesek átlagpontszáma pedig 50%-kal magasabb, mint az alsóéveseké. Mennyi a felsőévesek átlagpontszáma?* (*13 pont*)

I. megoldás. Ha az alsóévesek száma 50%-kal több, akkor $1{,}5 : 1 = 60 : 40$ arányban kell a százat felbontani. Tehát az alsóévesek 60-an, a felsőévesek 40-en vannak.

Az is világos, hogy ha ugyanannyiszor többen vannak az alsóévesek, mint ahányszor több a felsőévesek átlagpontszáma, akkor összesen ugyanannyi pontot érnek el, mindegyik $(100 \cdot 100)/2 = 5\,000$ pontot. Ha ezt 40 felsőéves éri el, akkor átlagpontszámuk $5000/40 = 125$. Ellenőrzésképp megállapíthatjuk, hogy az alsóévesek átlagpontszáma $5000/60 = 250/3$. Valóban:

$$\frac{125}{\frac{250}{3}} = \frac{\frac{375}{3}}{\frac{250}{3}} = 1{,}5.$$

II. megoldás. Ha a felsőévesek létszáma x, akkor az alsóéveseké $1{,}5x$. Ha az alsóévesek átlagpontszáma y, akkor a felsőéveseké $1{,}5y$.

$$x + 1{,}5x = 100, \qquad \frac{x \cdot 1{,}5y + y \cdot 1{,}5x}{100} = 100.$$

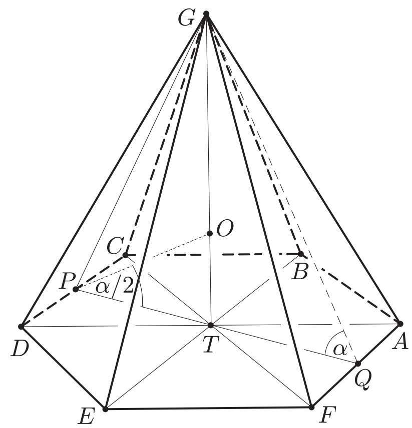
Az első egyenletből $x = 40$. A másodikból pedig $y = 10\,000/120 = 250/3 \approx 83{,}3$.

A felsőévesek átlagpontszáma $1{,}5y = 125$. Valóban:

$$\frac{40 \cdot 125 + \frac{250}{3} \cdot 60}{100} = 100.$$

4. *Egy szabályos hatszög alapú gúla alapélei* 5 cm, *oldalélei* 10 cm *hosszúságúak. Mekkora a gúla térfogata, a beírt és köré írt gömb sugara? Mekkora egy oldallapnak az alaplappal bezárt szöge?* (*13 pont*)

Megoldás. A szabályos hatszög AD átlója az oldal kétszerese: 10 cm. Így az ADG háromszög szabályos, magassága: $TG = 5\sqrt{3}$ cm.



Egy 5 cm oldalú szabályos háromszög területe:

$$t_1 = \frac{25\sqrt{3}}{4}\ \mathrm{cm}^2.$$

A gúla térfogata:

$$V = \frac{Tm}{3} = \frac{6 \cdot 25\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 5\sqrt{3}}{3} = \frac{375}{2}\ \mathrm{cm}^3.$$

Az ADG háromszög köré írt kör sugara, egyben a gúla köré írt gömb sugara is:

$$R = \frac{2}{3} \cdot TG = \frac{10\sqrt{3}}{3} \approx 5{,}774\ \mathrm{cm}.$$

Az oldallapnak az alaplappal bezárt szöge pl. a $TQG\sphericalangle = \alpha$, amelyre

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{TG}{TQ} = \frac{5\sqrt{3}}{\frac{5\sqrt{3}}{2}} = 2, \quad \text{amiből} \quad \alpha = 63{,}43°.$$

A beírt gömb sugara a PQG háromszögbe írt kör sugarával egyenlő: $r = OT = PT \cdot \operatorname{tg}(\alpha/2) \approx 2{,}676$ cm.

II. rész

5. *a) Mennyi* $\lg x - \lg y$ *értéke, ha az* x, y *számokra teljesül a*

$$2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0$$

feltétel?

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a $4^{x+\frac{1}{2}} - 5 \cdot 6^x + 9^{x+\frac{1}{2}} = 0$ *egyenletet.*

c) Milyen $0 \le \alpha < 360°$ *szögek a megoldásai a*

$$4\sin^2\alpha - 5\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 5\cos^2\alpha = 2$$

egyenletnek? (*5 + 5 + 6 pont*)

Megoldás. *a)* $\lg x - \lg y$ akkor értelmezhető, ha $x > 0$ és $y > 0$. Ez esetben a $2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0$ egyenletet eloszthatjuk y^2-tel:

$$2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x}{y} + 3 = 0.$$

Az $\frac{x}{y} = t$ helyettesítéssel kapott $2t^2 - 5t + 3 = 0$ egyenlet megoldásai $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{3}{2}$.

Ha $\frac{x}{y}$ =1, akkor $\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y} = 0$; ha $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, akkor

$$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y} = \lg \frac{3}{2} \approx 0{,}1761.$$

Azt használtuk fel, hogy az $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ homogén másodfokú egyenletből meg tudjuk határozni $\frac{x}{y}$ értékét. Ezt fogjuk alkalmazni a *b)* és *c)* feladatokban is.

b)

$$4^{x+\frac{1}{2}} - 5 \cdot 6^x + 9^{x+\frac{1}{2}} = 0,$$
$$2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x = 0.$$

9^x nem lehet 0, ezért oszthatjuk az egyenlet mindkét oldalát 9^x-nel:

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0.$$

A $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ helyettesítéssel kapott $2t^2 - 5t + 3 = 0$ egyenlet megoldásai $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{3}{2}$. A $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$ egyenlet megoldása $x = 0$, a $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$ egyenlet megoldása $x = -1$.

c) Ez esetben az egyenletünk nem homogén másodfokú, de ha a jobb oldalon álló 2 helyett $\left(2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha\right)$-t helyettesítünk, akkor 0-ra redukálva a

$$2\sin^2\alpha - 5\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 3\cos^2\alpha = 0$$

homogén egyenletet kapjuk.

Az adott intervallumban $\alpha = 90°$ és $\alpha = 270°$ esetén lesz $\cos\alpha = 0$. Ezek egyike sem megoldása az egyenletnek, ezért oszthatjuk az egyenlet mindkét oldalát $\cos^2\alpha$-val:

$$2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 5\,\mathrm{tg}\,\alpha + 3 = 0.$$

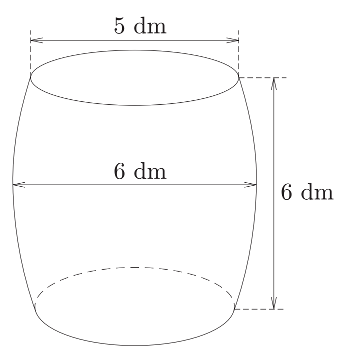
A $\mathrm{tg}\,\alpha = t$ helyettesítéssel kapott $2t^2 - 5t + 3 = 0$ egyenlet megoldásai $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{3}{2}$.

A $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$ egyenlet megoldása az adott intervallumban $\alpha = 45°$ és $\alpha = 225°$.

A $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{2}$ egyenlet megoldása az adott intervallumban $\alpha = 56{,}31°$ és $\alpha = 236{,}31°$.

A *b)* és *c)* feladatban kapott gyökök is kielégítik az egyenleteket.

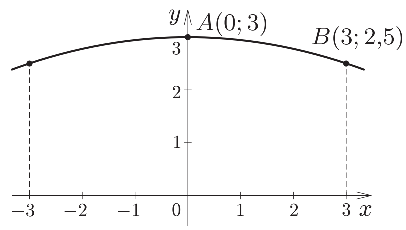
6. *Egy hordó legnagyobb átmérője* 6 dm, *legkisebb átmérője* 5 dm, *magassága* 6 dm. *(Ezek a hordó belső méretei.) A hordó olyan forgástestnek tekinthető, amely egy szimmetrikus parabolaív forgatásával keletkezett.*



a) Mekkora a hordó térfogata?

b) Hány százalékos hibát vétünk, ha a hordó térfogatát olyan hengerrel közelítjük, amelynek magassága megegyezik a hordóéval, átmérője pedig a hordó legkisebb és legnagyobb átmérőjének számtani közepével? (*16 pont*)

Megoldás. Helyezzük el a parabolaívet koordináta-rendszerbe, és határozzuk meg a parabola egyenletét.



Az y-tengelyre szimmetrikus parabola egyenlete $y = ax^2 + b$. Az $A(0;3)$ és $B(3;2{,}5)$ pontok illeszkednek a parabolára, ezért a koordináták kielégítik az egyenletet: $3 = a \cdot 0 + b$, illetve $2{,}5 = 9a + b$. Ebből $a = -\frac{1}{18}$, $b = 3$, azaz a parabola egyenlete

$$y = -\frac{1}{18}x^2 + 3.$$

A forgástest térfogata

$$V = \pi \int_{-3}^{3} \left(-\frac{1}{18}x^2 + 3\right)^2 dx = \pi \int_{-3}^{3} \left(\frac{1}{324}x^4 - \frac{1}{3}x^2 + 9\right) dx =$$
$$= \pi \left[\frac{x^5}{1620} - \frac{x^3}{9} + 9x\right]_{-3}^{3} \approx 151{,}74 \text{ dm}^3.$$

A közelítő henger térfogata

$$V_h = \left(\frac{2{,}5 + 3}{2}\right)^2 \cdot 6\pi \approx 142{,}55 \text{ dm}^3.$$

A közelítés abszolút hibája 9,19 dm, a relatív hiba $9{,}19/151{,}74 = 0{,}0606$. Azaz a közelítés hibája 6,06%-os.

7. *a) Hányféleképpen állítható elő a* 2016 *szomszédos pozitív egész számok összegeként?*
b) Adjunk meg egy olyan, 2016*-nál nagyobb, pozitív egész számot, amely nem állítható elő szomszédos pozitív egész számok összegeként.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen az első szám n, és adjunk össze $k(>1)$ db természetes számot, azaz

$$n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+k-1) = 2016.$$

Ezek a számok egy k elemű számtani sorozatot alkotnak, ezért

$$S = \frac{k \cdot \big(n + (n+k-1)\big)}{2} = 2016,$$
$$k \cdot (2n + k - 1) = 4032,$$
$$k \cdot (2n + k - 1) = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

A $4032 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$ számnak $(6+1)(2+1)(1+1) = 42$ pozitív osztója van. Ebből 21 pár készíthető, de ezek nem mind adnak n-re és k-ra pozitív egészeket. Ha figyelembe vesszük, hogy k és $2n + k - 1$ különböző paritású, és a $2n+k-1 > k > 1$ feltételeket, akkor láthatjuk, hogy 4032-t úgy kell két, 1-nél nagyobb szám szorzatára bontani, hogy az egyik tényező páratlan, a másik páros legyen. Ekkor a kisebb tényező adja k értékét, a nagyobb lesz $2n + k - 1$.

4032-nek ugyanannyi páratlan osztója van, mint a $3^2 \cdot 7 = 63$ számnak: $(2+1) \cdot (1+1) = 6$ db. Ezek közül az 1-hez nem tartozik megfelelő k és n. Tehát ötféle felbontás van, ezért 2016 ötféleképp írható fel szomszédos pozitív egész számok összegeként.

(A megfelelő párok:

k	3	7	9	21	63
$2n+k$-1	1344	576	448	192	64
n	671	285	220	86	1

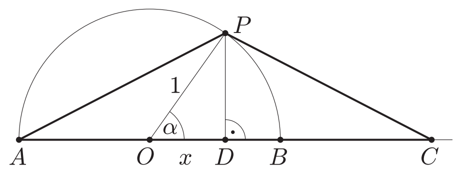
A megfelelő összegek: $671+672+673$, $285+286+\ldots+291$, $220+221+\ldots+228$, $86+87+\ldots+106$, $1+2+3+\ldots+63$.)

b) A fenti megoldásból látható, hogy ha az M számot akarjuk felírni szomszédos pozitív egész számok összegeként, akkor $2M$-et kell egy páros és egy 1-nél nagyobb páratlan szám szorzataként felírni. Ha M kettő-hatvány, akkor $2M$-nek nincs 1-nél nagyobb páratlan osztója.

Eszerint pl. $2^{11} = 2048$ nem írható fel szomszédos pozitív egész számok összegeként.

8. *Az AB átmérőjű kör egy pontja P. Az AB egyenesnek C az a pontja, amelyre $AP = PC$. P mely helyzetében lesz az ACP háromszög területe maximális?* *(16 pont)*

I. megoldás. Legyen a kör sugara 1, a P pontból az AC-re állított merőleges talppontja D és legyen $OD = x$.



Ekkor $PD = \sqrt{1-x^2}$.

$$T_{APC} = \frac{AC \cdot PD}{2} = \frac{2 \cdot (1+x)\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

Mivel T pozitív, ezért ugyanott van maximuma, mint négyzetének. T^2-re alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép összefüggését négy számra:

$$T_{APC}^2 = (1+x)^2(1-x^2) = \frac{1}{3}(1+x)^3(3-3x) \leq$$
$$\leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{(1+x)+(1+x)+(1+x)+(3-3x)}{4}\right)^4 = \frac{1}{3}\left(\frac{6}{4}\right)^4.$$

Ebből:

$$T_{APC} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{9}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

T_{APC} ezt a maximális értéket akkor veszi fel, ha $1 + x = 3 - 3x$, azaz $x = 0{,}5$.

II. megoldás. Legyen a kör sugara 1, és legyen $POD = \alpha$ ($0° < \alpha < 90°$). Ekkor $PD = \sin\alpha$, $OD = \cos\alpha$.

$$T_{APC} = \frac{AC \cdot PD}{2} = \frac{2 \cdot (1+\cos\alpha)\sin\alpha}{2} = (1+\cos\alpha)\sin\alpha.$$

Ezt négyzetre emelve újra alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép összefüggését négy számra:

$$T_{APC}^2 = (1+\cos\alpha)^2\sin^2\alpha = (1+\cos\alpha)^3(1-\cos\alpha) = \frac{1}{3}(1+\cos\alpha)^3(3-3\cos\alpha) \leq$$
$$\leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3(1+\cos\alpha)+(3-3\cos\alpha)}{4}\right)^4 = \frac{1}{3}\left(\frac{6}{4}\right)^4.$$

Ebből:

$$T_{APC} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{9}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

T_{APC} ezt az értéket akkor veszi fel, ha $1 + \cos\alpha = 3 - 3\cos\alpha$, azaz $\cos\alpha = 0{,}5$, $\alpha = 60°$.

III. megoldás. A $T_{APC} = (1+\cos\alpha)\sin\alpha = \sin\alpha + 0{,}5 \cdot \sin 2\alpha$ függvény maximumát differenciálással keressük meg:

$$T' = \cos\alpha + \cos 2\alpha = \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1.$$

Ennek zérushelyei $\cos\alpha = 0{,}5$ és $\cos\alpha = -1$.

A feladatnak csak az első felel meg, és táblázattal, vagy második deriválttal beláthatjuk, hogy $\alpha = 60°$-nál a területnek valóban maximuma van.

9. *Ha felírjuk az összes olyan ötjegyű számot, amelyben az 1 és 2 számjegyeken kívül más jegy nem szerepel, akkor mennyi lesz*

a) a felírt számok összege,

b) a felírt számjegyek összege,

c) annak a valószínűsége, hogy két véletlenszerűen kiválasztott ilyen számban ugyanannyi a számjegyek összege? *(5 + 4 + 7 pont)*

Megoldás. $2^5 = 32$ ilyen szám van. Minden helyiértéken a számjegyek fele 1-es, a fele 2-es, tehát a számok összege

$$(1 + 10 + 100 + 1000 + 10\,000)(16 \cdot 1 + 16 \cdot 2) = 533\,328.$$

Megjegyzés. Az 11111, 11112, 11121, ..., 22212, 22221, 22222 nem számtani sorozat, de a számtani sorozatra jellemző

$$S = \frac{32 \cdot (11111 + 22222)}{2}$$

képlet helyes végeredményt ad. Ennek az oka, hogy a sorozatban a k-adik és $(33 - k)$-adik elem összege mindig $33\,333$.

b) Az $5 \cdot 32 = 160$ jegy fele 1-es a fele 2-es, tehát a számjegyek összege $80 \cdot (1 + 2) = 240$.

c) Az adott számokban a jegyek összege 5, 6, 7, 8, 9 és 10 lehet, de 5 és 10 csak egy-egy számban lesz az összeg, vagyis nem lehet két kiválasztott számban a jegyek összege 5, illetve 10.

A jegyek összege annyi számban lesz 6, 7, 8 vagy 9, ahányféleképp az öt helyen el tudjuk osztani az 1, 2, 3 vagy 4 db 2-es számjegyet.

5 számban lesz a jegyek összege 6, 10-ben 7, 10-ben 8, és 5-ben 9. Ezek páronként kizáró lehetőségek, ezért annak a valószínűsége, hogy két választott számban a jegyek összege egyenlő:

$$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{32}{2}} + \frac{\binom{10}{2}}{\binom{32}{2}} + \frac{\binom{10}{2}}{\binom{32}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{110}{496} = \frac{55}{248} \approx 0{,}221\,8.$$