A bizonyítandó állítást két részre bontjuk. Először belátjuk, hogy a sorozatnak nincs $[\sqrt{n}]$-nél kisebb tagja, azaz $x_i \geq [\sqrt{n}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

A feltételek szerint $x_1 = n > [\sqrt{n}]$, továbbá

$$x_{i+1} = \left[\frac{x_i + \left[\dfrac{n}{x_i}\right]}{2}\right] = \left[\frac{x_i + \dfrac{n}{x_i}}{2}\right].$$

Itt felhasználtuk azt, hogy x_i egész, így ha a számlálót egy 1-nél kisebb pozitív számmal $\left(\dfrac{n}{x_i}\text{ törtrészével}\right)$ növeljük, a tört egész része nem változik. Az x_i pozitív, így alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{x_i + \dfrac{n}{x_i}}{2} \geq \sqrt{x_i \cdot \frac{n}{x_i}} = \sqrt{n},$$

amiből az $x_{i+1} \geq [\sqrt{n}]$ állítást kapjuk, hiszen ha $a \geq b$, akkor $[a] \geq [b]$.

A bizonyítás második lépéseként belátjuk, hogy $x_i > [\sqrt{n}]$ esetén $x_{i+1} < x_i$. Ekkor ugyanis $x_i \geq [\sqrt{n}] + 1 > \sqrt{n}$, tehát $x_i > \left[\dfrac{n}{x_i}\right]$. Ezt x_{i+1} definiáló összefüggésével egybevetve

$$x_{i+1} = \left[\frac{x_i + \left[\dfrac{n}{x_i}\right]}{2}\right] < x_i.$$

Tehát a sorozat mindaddig szigorúan monoton csökken, míg $[\sqrt{n}]$-et nem éri el. Mivel egész számokból áll, ez legfeljebb $n - [\sqrt{n}]$ lépésben bekövetkezik.

(K. M.)

Csikós Zsolt (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)