Az előző részben két csúcs között kerestünk útvonalat egy gráfban. Az ott megismert szélességi keresés a start csúcstól a cél csúcsig megtalál egy legrövidebb útvonalat, ha van út a két csúcs között. Amennyiben a keresés során nem adunk meg cél csúcsot, akkor a start csúcsból elérhető összes csúcsra kapunk egy legrövidebb útvonalat, vagyis bejárja a start csúcsból elérhető részgráfot. Az útvonal úgy áll elő, hogy a keresés során mindegyik érintett csúcshoz följegyezzük, hogy melyik szomszédjától értünk el hozzá.

A szélességi keresés/bejárás természetesen csak az egyik lehetséges módja a start csúcstól egy másikhoz vezető út megtalálásának, vagy a start csúcsból elérhető csúcsokhoz vezető utak fölírásának. Amikor ki akarunk találni egy labirintusból, akkor a gyakorlatban inkább a *mélységi keresés* algoritmusát követjük. Elindulunk a (valamilyen sorrend szerinti) első járaton, majd megérkezünk a járat végéhez. Ha ez a kijárat (a gráfban a cél), akkor a keresésnek vége, ha nem, akkor két eset lehetséges: vagy nem tudunk tovább menni, innen nem nyílnak további járatok, vagy ez egy elágazás, ahonnan nyílnak más, még nem bejárt részek. Ha zsákutcában vagyunk vagy az adott elágazás minden járatát már bejártuk, akkor visszamegyünk ahhoz az elágazáshoz, ahonnan ide érkeztünk, és ott a (sorrend szerinti) következő járaton folytatjuk a keresést. Ha elágazáshoz értünk, akkor az előbb leírt stratégiát ismételjük meg, a következő, még el nem ért szomszéd felé indulunk el.

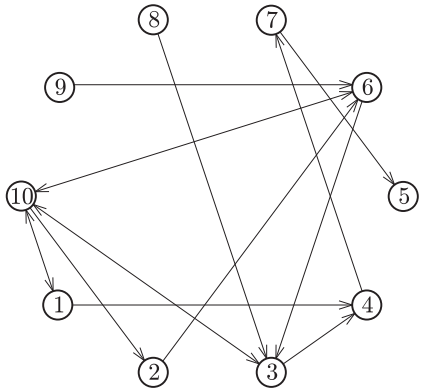
Az előbbi példában labirintusra megfogalmazott eljárás gráfokra is működik, ha az elágazásoknak megfeleltetjük a csúcsokat és a járatoknak az éleket. Bár egy labirintus megfelelője egy irányítatlan gráf, a mélységi bejárás az irányított gráfokat is a fent leírt módon bejárja, ha az éleken az irányítottságnak megfelelően haladunk előre. Visszalépéskor az irányítottsággal ellentétes irányban is haladhatunk. Ez a mozgás nem lesz a megtalált útvonal része, ahogy a szélességi keresésnél is egyik csúcsból egy nem szomszédos csúcsba léptünk az algoritmus végrehajtása közben.

Készítsük el ezek alapján a mélységi bejárás algoritmusát, vagyis keressünk egy kiinduló csúcsból az onnan elérhető csúcsokhoz utakat. Vegyük észre, hogy minden csúcsban ugyanazt a műveletsort kell végrehajtanunk, vagyis bejárnunk a még meg nem látogatott szomszédjai által elérhető részét a gráfnak. Ez az algoritmus nagyon egyszerűen megfogalmazható rekurzívan. Bejárás közben nem szeretnénk egy csúcsot kétszer megvizsgálni, ezért a szélességi kereséshez hasonlóan most is megjelöljük a már meglátogatott csúcsokat egy `jártunk` tömbben. Az útvonalak tárolásához most is fölveszünk egy `honnan` táblázatot, amelyből a mélységi bejárás után az összes kiinduló csúcsból elérhető út kiolvasható.

```
Mélységi bejárás rekurzívan(gráf, start)
    jártunk(csúcsok start kivételével) := nem
    honnan(minden csúcsra) := nem_létező_csúcs
    MBR(start)
Mélységi bejárás rekurzívan vége
MBR(csúcs)
    jártunk(csúcs) := igaz
    szomszéd := csúcs első szomszédja
    Ciklus amíg szomszéd létező csúcs
        Ha nem jártunk[szomszéd] akkor
            honnan(szomszéd) := csúcs
            MBR(szomszéd)
        Elágazás vége
        szomszéd := csúcs következő szomszédja
    Ciklus vége
MBR vége
```

A rekurzív megfogalmazás további előnye, hogy a visszalépésről nem kell külön gondoskodnunk: amikor egy csúcsból valamely szomszédos csúcson át elérhető részgráfot bejártuk, vagyis az `MBR(szomszéd)` eljárás lefutott, akkor a végrehajtás visszakerül a hívó ciklusba, és az adott csúcs következő, még el nem ért szomszédjánál folytatódik a bejárás.

Példaként vegyünk egy irányított gráfot, melynek csúcsai 1-től 10-ig sorszámozottak, és a közöttük lévő kapcsolatokat az alábbi *ábra* szerintiek. Amennyiben a szomszédokat a sorszámuk szerint növekvő sorrendben vesszük, akkor az `MBR(1)` hívás először végigjárja az $1 \to 4 \to 7 \to 5$ útvonalat, majd visszalépés után az $1 \to 10 \to 2 \to 6 \to 3$ részgráfot.



Az algoritmus nem rekurzív változatában minden csúcsnál megvizsgáljuk, hogy van-e még el nem ért szomszédja, vagy nincs. Az első esetben előre lépünk, a szomszéd lesz az aktuális csúcs, míg az utóbbi esetben visszalépünk ahhoz a szomszédhoz, ahonnan ide érkeztünk. Amikor egy szomszédból visszalépünk, akkor tudnunk kell, hogy melyik csúcsra kell visszalépnünk, valamint tudnunk kell, hogy annál a csúcsnál melyik a következő szomszéd, amelyet még érdemes vizsgálnunk. Ezt a két információt minden előrelépésnél meg kell őriznünk. A rekurzív algoritmusban ez automatikusan történt, mivel minden `MBR` eljáráshívás `csúcs` paramétere és `szomszéd` lokális változója egyedi minden hívásnál. A nem rekurzív algoritmusban nekünk kell gondoskodnunk az információk megőrzéséről.

Mivel több előrelépés adatait is tárolnunk kell, és visszalépéskor mindig a legutolsó előrelépés adataira van szükség, ezért egy *verem* elnevezésű adatszerkezetet használunk föl. A vermet általában akkor alkalmazzuk, amikor az egymás után elhelyezett elemeket éppen fordított sorrendben szeretnénk fölhasználni. A szélességi keresésnél megismert *sorhoz* hasonlóan egyszerűen megvalósítható egy tömbbel és néhány változóval. Legyen a verem adatait tároló tömb `v`, mérete legyen `méret`, és mutasson *vm* az első üres helyre a tömbben. Ha a tömb 1-től sorszámozott, akkor az üres tömbnél `vm` értéke kezdetben 1. A verem szokásos műveletei: a verembe helyezés és a verem tetejéről egy elem kivétele, valamint annak vizsgálata, hogy a verem üres-e. Megvalósításuk egyszerű, a verembe helyezés például a következő:

```
Verembe(elem)
    Ha vm <= méret akkor
        v[vm] := elem
        vm := vm + 1
    különben
        Hiba: nincs több hely a veremben
    Elágazás vége
Verembe vége
```

A mélységi bejárás nem rekurzív algoritmusát általában nem a fenti leírás szerint, hanem egyszerűbben valósítjuk meg. Az egyszerűsítés alapja az az ötlet, hogy ne a visszalépéshez szükséges adatokat helyezzük a verembe, hanem – megfelelő sorrendben – minden csúcsot, amelyet még nem látogattunk meg. A verem itt hasonlóan szerepet játszik, mint a szélességi bejárásnál a sor. Először az üres verembe helyezzük a start csúcsot, majd amíg a verem nem üres, addig a következőt ismételjük: kiveszünk egy csúcsot a veremből, és ha még nem jártunk ott, akkor megjelöljük, hogy már jártunk, és a verembe helyezzük az összes még föl nem keresett szomszédját. Így gyakorlatilag lecseréljük a verem tetején lévő, most elért csúcsot a még föl nem keresett szomszédjaira. Mivel mindig a verem tetejéről vesszük ki az utolsó oda rakott elemet, ezért a verembe korábban elhelyezett csúcsokhoz – amelyek most a szomszédok alatt vannak – később, csak a szomszédok és részgráfjaik bejárása után érünk el. Kivéve, ha egy szomszéd által kijelölt részgráfban egy korábban a verembe került csúcsot elérünk, de akkor az előbb is következik a mélységi bejárás során, tehát a veremből való kikerüléskor már nincs dolgunk vele.

```
Mélységi bejárás(gráf, start)
    jártunk(csúcsok start kivételével) := nem
    honnan(minden csúcsra) := nem_létező_csúcs
    Verem_legyen_üres
    Verembe(csúcs)
    Ciklus amíg Verem nem üres
        Veremből(csúcs)
        Ha nem jártunk(csúcs) akkor
            jártunk(csúcs) := igaz
            szomszéd := csúcs első szomszédja
            Ciklus amíg szomszéd létező csúcs
                Ha nem jártunk(szomszéd) akkor Verembe(szomszéd)
                szomszéd := csúcs következő szomszédja
            Ciklus vége
```

```
        Elágazás vége
    Ciklus vége
Mélységi bejárás vége
```

Amennyiben a gráfot a legegyszerűbb módon, egy szomszédsági mátrixszal adjuk meg, akkor a szomszédokon egy egyszerű ciklussal végig lehet haladni, illetve könnyű megadni az első, vagy valamely szomszéd után következő szomszédot.

Ha egy feladatban útvonalat keresünk egy gráfban a start csúcstól a cél csúcsig, akkor az előbbi két algoritmust úgy kell módosítanunk, hogy hagyják abba a keresést a cél csúcs megtalálásakor. A bejárás rekurzív `MBR` eljárását most érdemes függvénnyé alakítanunk, hogy visszaadja egy logikai érték formájában a keresés sikerességét.

```
Mélységi keresés rekurzióval(gráf, start, cél)
    jártunk(csúcsok start kivételével) := nem
    honnan(minden csúcsra) := nem_létező_csúcs
    megvan_a_cél := MKR(start)
Mélységi keresés rekurzióval vége

MKR(csúcs)
    jártunk(csúcs) := igaz
    Ha csúcs = cél Akkor MKR := igaz
    különben
        elértük_a_célt := hamis
        szomszéd := csúcs első szomszédja, ahol még nem jártunk
        Ciklus amíg nem igaz elértük_a_célt és szomszéd létező csúcs
            honnan(szomszéd) := csúcs
            elértük_a_célt := MKR(szomszéd)
            Ha még nem igaz elértük_a_célt akkor
                szomszéd := csúcs következő szomszédja, ahol még nem jártunk
            Elágazás vége
        Ciklus vége
        MKR := elértük_a_célt
    Elágazás vége
MKR vége
```

Ne tévesszük össze `MKR` két különböző jelentését az algoritmus-leíró nyelvben: a függvényhívás végét és az eredmény visszaadását pl. az `MKR := elértük_a_célt` utasítás jelöli, míg a függvényhívás formája `MKR(szomszéd)`.

Az eddig megismert algoritmusok segítséget nyújtanak egy gráf bejárásában, illetve egy útvonal megtalálásában. Természetesen nem mindig csak erre van szükség, de a bemutatott két bejárás alapját képezi több gráfokkal kapcsolatos algoritmusnak. Egy-egy konkrét probléma megoldásakor sokszor a fenti kétféle keresés módosított változatait alkalmazzuk. A következő részben bemutatunk gráfokkal modellezhető problémákat, melyek a fenti gráfkereső algoritmusokkal megoldhatók.

Kérdések és feladatok:

1. A mélységi keresésnél mi felel meg a görög mitológiából ismert Ariadné fonalának?
2. A szélességi keresés a start csúcstól egy legrövidebb utat talált a cél csúcsig. Igaz-e ez a mélységi keresésre is?
3. Tételezzük föl, hogy lefutott valamelyik keresés vagy bejárást végző algoritmus, és elkészítette a `honnan` táblázatot. Fogalmazzuk meg az útvonal kiírásának rekurzív és nem rekurzív algoritmusát.
4. Kövessük végig a fenti példában adott gráfon a mélységi bejárás nem rekurzív változatának működését az 1-es csúcstól indulva: észrevehetjük, hogy nem a rekurzív változatnak megfelelően járja be a gráfot. Miért? Hogyan kellene módosítani a nem rekurzív algoritmust, hogy tényleg pontosan egyformán haladjanak?
5. Legföljebb mekkora méretű veremre van szükség egy N csúcsból álló gráf nem rekurzív mélységi bejárásához? Milyen az a gráf, amelynél ez a maximális méretű verem tele is lesz?
6. Készítsük el a mélységi keresés nem rekurzív változatát.