I. rész

1. *Hány olyan* 4 *darab egész számból álló adatsokaság van, melynek mediánja* 1*, átlaga* 2*, szórásnégyzete pedig* 3*? Mi(k) ez(ek) az adatsokaság(ok)?* (*12 pont*)

Megoldás. Az adatsokaság elemei nemcsökkenő sorrendben legyenek $a \le b \le c \le d$. A medián 1, és ez most – mivel páros számú adat van – a két középső szám átlaga, ezért $c = 2 - b$.

Valamint az átlag miatt a négy szám összege $a + b + (2 - b) + d = 8$, ezért $d = 6 - a$. Vagyis az elemek $a \le b \le 2 - b \le 6 - a$. A szórásnégyzetre kapott feltétel miatt

$$3 = \frac{(a-2)^2 + (b-2)^2 + (2-b-2)^2 + (6-a-2)^2}{4} = \frac{2a^2 - 12a + 2b^2 - 4b + 24}{4}.$$

Innen $12 = 2a^2 - 12a + 2b^2 - 4b + 24$. Ezt 2-vel osztva, és a jobb oldalon teljes négyzeteket kialakítva, végül rendezve, a $4 = (a-3)^2 + (b-1)^2$ egyenlet adódik.

Mivel a és b egész számok, ezért a 4 két négyzetszám összege. Ez csak úgy lehet, ha $0 = (a-3)^2$ és $4 = (b-1)^2$, vagy fordítva, $4 = (a-3)^2$ és $0 = (b-1)^2$.

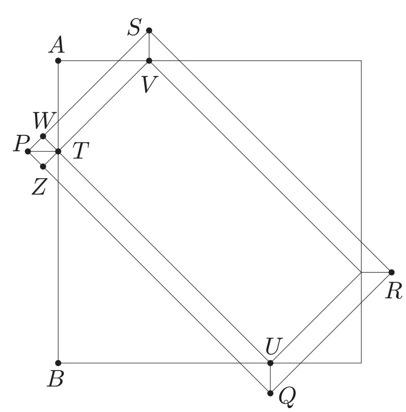
Az első esetben $a = 3$ és $|b - 1| = 2$, amiből a $3; -1; 3; 3$, illetve a $3; 3; -1; 3$ adatnégyeseket kapjuk. Ezek egyike sem jó, mert a mediánjuk 3.

A második esetben $|a - 3| = 2$ (innen $a = 5$ vagy $a = 1$) és $b = 1$ adódik. Mivel $a \le b$, ezért $a = 1$. Az így kapott négy szám kielégíti a feltételeket.

Vagyis egyetlen megfelelő számnégyes van: $1, 1, 1, 5$.

2. *Egy* 1 méter *oldalhosszúságú, négyzet alakú asztallapra egy téglalap alakú abroszt terítünk. Az abrosz hosszabb oldalai kétszer olyan hosszúak, mint a rövidebbek, és úgy helyezzük az asztalra, hogy középvonalai egybeessenek az asztallap átlóival. Így az abrosz mind a négy sarka az asztallap síkjához képest* 10 cm*-rel lelóg. Az asztallap hány százalékát fedi a terítő ebben a helyzetben?* (*13 pont*)

Megoldás. A feladat során deciméterben fogunk számolni. Tekintsük az *ábrát,* ahol A, B az asztallap két csúcsa, P, Q, R, S a terítő csúcsai visszahajtva az asztallap síkjába, míg T, U, V a P, Q, S csúcsoknak az asztallap megfelelő oldaléleire vett merőleges vetületei.



Legyen a terítő két oldalának hossza $PS = x$, illetve $PQ = 2x$, valamint $AT = a$. Ekkor $TB = 10 - a$.

A feladat szerint $PT = QU = SV = 1$. Így a terítő elrendezése miatt

$$PZ = PW = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ekkor

$$TV = x - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = x - \sqrt{2} \quad \text{és} \quad TU = 2x - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2x - \sqrt{2}.$$

Az ATV és a BUT háromszögek egyenlő szárú derékszögű háromszögek, így $TV = \sqrt{2}a$ és $TU = \sqrt{2}(10 - a) = 10\sqrt{2} - \sqrt{2}a$. Innen a-ra és x-re a következő egyenleteket kapjuk: $x - \sqrt{2} = \sqrt{2}a$ és $2x - \sqrt{2} = 10\sqrt{2} - \sqrt{2}a$. Az egyenleteket összeadva, majd mindkét oldalhoz $2\sqrt{2}$-t adva: $3x = 12\sqrt{2}$, amiből $x = 4\sqrt{2}$ adódik.

Vagyis a terítő oldalai $4\sqrt{2}$ és $8\sqrt{2}$ hosszúak.

Így a terítő teljes területe $4\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} = 64$. Viszont az asztallapot nem fedi a négy saroknál lévő egybevágó egyenlő szárú, derékszögű háromszög. Ezek közül kettőt-kettőt együtt véve éppen két olyan négyzet kapható, melyek átlói 2 dm hosszúak. Így az abrosz asztallapot nem fedő részének a területe: $2 \cdot \dfrac{2 \cdot 2}{2} = 4$.

Ezek szerint az abrosz az asztal 100 dm^2-es területéből pontosan 60 dm^2-t fed le, vagyis az abrosz az asztallapnak pontosan a 60%-át fedi le.

Megjegyzés. Mivel a terítő hosszabb oldala rövidebb az asztallap átlójánál $\left(8\sqrt{2} < 10\sqrt{2}\right)$, ezért valóban a fenti ábrán lerajzolt elrendezés valósul meg.

3. *Oldjuk meg a következő egyenletet az egész $(x; y)$ számpárok halmazán:*

$$2x - 2 - \sqrt{8x+4} = -\left|\frac{3y-2}{5}\right|.$$

(14 pont)

Megoldás. A $\sqrt{8x+4}$ miatt $-\frac{1}{2} \le x$, és mivel x egész, ezért legalább 0. A bal oldalt átalakítva:

$$(2x+1) - 2\sqrt{2x+1} - 3 = (2x+1) - 2\sqrt{2x+1} + 1 - 4.$$

Ez utóbbit $\sqrt{2x+1}$-ben teljes négyzetté alakítva az egyenletünk a következő alakra hozható:

$$\left(\sqrt{2x+1} - 1\right)^2 - 4 = -\left|\frac{3y-2}{5}\right|.$$

Mivel a jobb oldal nem pozitív, a bal sem lehet az. Vagyis $\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2 \le 4$, innen $\left|\sqrt{2x+1}-1\right| \le 2$, vagyis $-1 \le \sqrt{2x+1} \le 3$. Innen $2x+1 \le 9$, végül $x \le 4$ adódik. Vagyis x lehetséges értékei 0, 1, 2, 3 és 4.

Helyettesítsük be ezeket az értékeket rendre az egyenlet bal oldalába.

Az $x=1$, $x=2$ és $x=3$ esetén a bal oldal értéke irracionális. Mivel a jobb oldal racionális (hiszen y egész), ezek nem adnak megoldásokat.

Ha $x=0$, akkor a bal oldal értéke: $0 - 2 - \sqrt{0+4} = -4$. Ekkor $4 = \left|\frac{3y-2}{5}\right|$, tehát vagy $4 = \frac{3y-2}{5}$, amiből $y = \frac{22}{3}$, ami nem megoldás; vagy $-4 = \frac{3y-2}{5}$, amiből $y=-6$, ami megoldás.

Ha $x=4$, akkor a bal oldal értéke: $8 - 2 - \sqrt{32+4} = 0$. Ekkor $0 = \left|\frac{3y-2}{5}\right|$, vagyis $y = \frac{2}{3}$, ami szintén nem megoldás.

Összesen egyetlen megfelelő számpár van, és ez az $x=0$, $y=-6$.

4. *Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonját elmetsszük az $x=b$ egyenletű függőleges egyenessel. Az egyenes, $f(x)$, és az x-tengely által bezárt S síkidom területe $t=18$.*

a) Mennyi b pontos értéke?

b) Az S síkidomot megforgatjuk az x-tengely körül. Mekkora a keletkezett forgástest térfogata? *(12 pont)*

Megoldás. *a)* A kérdéses terület számolható integrál segítségével:

$$T = 18 = \int_0^b \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^b x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + c\right]_0^b = \frac{2}{3}\cdot b^{\frac{3}{2}}, \quad \text{innen } 27 = b^{\frac{3}{2}}, \text{ végül } b = 9.$$

b) A kérdéses térfogat:

$$V = \pi\int_0^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^9 x\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{1}{2}\cdot x^2 + c\right]_0^9 = \frac{81}{2}\pi \approx 127{,}23.$$

II. rész

5. *a) Igazoljuk, hogy az $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$ egyenletnek van egyjegyű pozitív egész megoldása.*

b) Oldjuk meg az $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán.

c) Adjuk meg a tangensra vonatkozó addíciósképletek és nevezetes szögek szögfüggvényei segítségével a 105° és a 165° szögek tangenseinek a pontos értékét.

d) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$(\operatorname{tg} x + 2)^2 = 7 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

(16 pont)

Megoldás. *a*) Az $x=1$ megoldás, ez behelyettesítéssel ellenőrizhető. (A racionális gyökteszt mutatja, hogy nem is lehet más pozitív egész megoldás.)

b) Mivel $x=1$ megoldása az egyenletnek, az egyenlet bal oldala felírható

$$x^3+3x^2-3x-1=(x-1)\big(ax^2+bx+c\big)$$

alakban alkalmas a, b, c valós konstansokkal.

Két polinom akkor egyezik meg, ha együtthatóik rendre azonosak. Így

$$(x-1)\big(ax^2+bx+c\big)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c=1\cdot x^3+3\cdot x^2-3\cdot x-1$$

miatt rendre $a=1$, $b=4$, $c=1$ adódik.

Az egyenletet $(x-1)(x^2+4x+1)=0$ szorzatalakra hozva a bal oldal második tényezőjéből adódik, hogy $x_2=-2-\sqrt{3}$, illetve $x_3=-2+\sqrt{3}$ az egyenlet két irracionális gyöke a korábban megtalált $x_1=1$ mellett.

c) Felhasználva a $\operatorname{tg}45^\circ=1$, $\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$ és $\operatorname{tg}120^\circ=-\sqrt{3}$ értékeket, valamint a következő addíciós képletet:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

kapjuk:

$$\operatorname{tg}105^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ+60^\circ)=\frac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}}=\frac{\big(1+\sqrt{3}\,\big)^2}{\big(1-\sqrt{3}\,\big)\big(1+\sqrt{3}\,\big)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}\,.$$

Hasonlóan:

$$\operatorname{tg}165^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ+120^\circ)=\frac{1-\sqrt{3}}{1-1\cdot\big(-\sqrt{3}\,\big)}=\frac{\big(1-\sqrt{3}\,\big)^2}{\big(1+\sqrt{3}\,\big)\big(1-\sqrt{3}\,\big)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{-2}=$$
$$=-2+\sqrt{3}\,.$$

d) A $\operatorname{tg}x$ és $\operatorname{ctg}x$ függvények értelmezési tartománya miatt $x\neq k\cdot\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$, ugyanezen okokból sem $\operatorname{tg}x$, sem $\operatorname{ctg}x$ nem lehet 0.

Elvégezve a zárójelfelbontást, és rendezve az egyenletet: $\operatorname{tg}^2x+3\operatorname{tg}x-3-\operatorname{ctg}x=0$ adódik. Innen $\operatorname{tg}x$ $\left(=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}x}\neq 0\right)$-szel szorozva a $\operatorname{tg}^3x+3\operatorname{tg}^2x-3\operatorname{tg}x-1=0$ egyenletet kapjuk. Ez $\operatorname{tg}x$ helyére új változót bevezetve az új változóban éppen a *b*)-beli egyenlet. Vagyis $(\operatorname{tg}x)_{1,2,3}=-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3};1$.

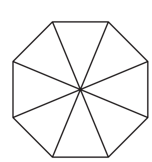
A *c*) pontot figyelembe véve, rendre megoldva az egyenleteket:

ha $\operatorname{tg}x=-2-\sqrt{3}$, akkor $x_1=\dfrac{7\pi}{12}+k\cdot\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$;

ha $\operatorname{tg}x=-2+\sqrt{3}$, akkor $x_2=\dfrac{11\pi}{12}+l\cdot\pi\quad(l\in\mathbb{Z})$, végül

ha $\operatorname{tg}x=1$, akkor $x_3=\dfrac{\pi}{4}+m\cdot\pi\quad(m\in\mathbb{Z})$ adódik megoldás gyanánt.

6. *Egy szabályos nyolcszögbe az* ábra *szerint a középpontján keresztül nyolc egyforma egyenlő szárú háromszöget rajzolunk be.*



a) *Mekkora a háromszögek súlypontjai által meghatározott szabályos nyolcszög, illetve az eredeti nyolcszög területének az aránya?*

b) *Kati az ábrának megfelelő pörgettyűket csinál. A pörgettyűk felső felén lévő nyolc kis háromszög mindegyikét kifesti a piros, fehér, vagy zöld színek valamelyikével (a pörgettyű alját nem festi le).*

Hányféle különböző pörgettyűt készíthet Kati, ha az élben szomszédos háromszögek színét különbözőnek szeretné, de nem ragaszkodik ahhoz, hogy mind a három színt felhasználja? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Vegyük az eredeti nyolcszög köré írható körének sugarát $R=1$-nek (ez megtehető).

Az ábrán lévő háromszögek olyan egyenlő szárú háromszögek, melyeknek alapjukkal szemközt $45°$-os szöge van. Egy ilyen háromszög alapjának magassága egyben súlyvonal is, valamint a $45°$-os csúcsszöget felezi. A csúcstól a súlypontig terjedő szakasz a magasság-súlyvonalnak a $2/3$-a, ez az új nyolcszög köré írható körének sugara.

Ezek alapján az új nyolcszög köré írható körének sugara

$$r=\cos 22{,}5° \cdot \frac{2}{3}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{3}\approx 0{,}616.$$

Ez a hasonlóság aránya. Ennek négyzete a kérdéses területek aránya, vagyis

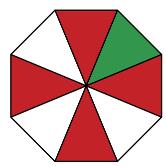
$$\frac{t_{\text{új}}}{T_{\text{régi}}}=\frac{2+\sqrt{2}}{9}\approx 0{,}379.$$

b) A feladat szövege alapján az egymásba forgatható pörgettyűk azonosnak tekintendőek.

*b*1) Ha csak két színt használunk fel, és rögzítjük melyik ez a két szín, akkor csak egyféle pörgettyűt tudunk csinálni (hiszen felváltva kell szerepelni a két színnek a festett háromszögek között.) A felhasznált két színt (vagy a nem felhasznált egyet) háromféleképpen választhatjuk ki. Tehát itt 3 eset van.

*b*2) Ha mind a három szín szerepel, akkor – aszerint, hogy az egyes színeket hányszor használjuk – a következő esetek lehetnek: $4,3,1$ / $4,2,2$ / $3,3,2$.

*b*21) A „$4,3,1$” eset. Azt a színt, amelyikből 4 háromszög van 3-féleképpen, amiből 1 van, már csak 2-féleképpen választhatjuk, vagyis színeket 6-féleképpen választhatunk.

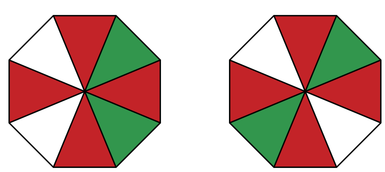


*b*21)

Ha már kiválasztottuk, hogy melyik színből mennyi lesz, akkor viszont már csak egyféle pörgettyű készíthető, hiszen amelyik színből 4 van, azt csak úgy tehetjük le, hogy minden két ilyen színű háromszög között pontosan egy másféle színű háromszög található. A másmilyen színek pedig a forgatás miatt csak egyféleképp „helyezhetők el”.

Tehát itt összesen 6 eset lehetséges.

*b*22) A „$4,2,2$” eset. Azt a színt, amelyikből 4 háromszög van 3-féleképpen választhatjuk. Vagyis színeket most csak 3-féleképpen választhatunk.



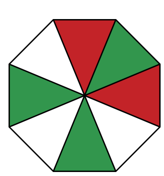
*b*22)

Ha már kiválasztottuk, hogy melyik színből mennyi lesz, akkor azt a színt, amelyikből 4 van, most is csak egyféleképpen tehetjük le. A két egyforma színből az egyik fajtát a maradék négy helyre kétféleképpen is tehetjük. Vagy úgy, hogy egy háromszög legyen közöttük, vagy úgy, hogy egymással szemben legyenek (lásd az *ábrákat*). Vagyis itt $3\cdot 2=6$ eset lehetséges.

*b*23) A $3,3,2$ eset. Azt a színt, amelyikből 2 háromszög van 3-féleképpen választhatjuk. Vagyis színeket megint csak 3-féleképpen választhatunk.

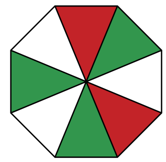
Ha pl. a pirosból van kettő, akkor három lehetőség van aszerint, hogy a két piros háromszög között 1, 2, vagy 3 háromszög kap más színt. Vizsgáljuk meg ezeket rendre.

*b*231) Ha a két piros között egy háromszög más színű. Ennek a háromszögnek a színét 2 szín közül választhatjuk. Ha viszont már választottunk (legyen pl. zöld), akkor a maradék 5 színezetlen háromszög közül 3 – a zöldtől különböző – azonos szín van még, ami csak egyféleképpen színezhető jól. Vagyis itt összesen 2 eset lehetséges.



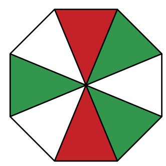
*b*231)

*b*232) Ha a két piros között két háromszög más színű. Ezen két háromszögnek a színét 2-féleképpen választhatjuk ki. Hasonlóan a maradék 4 színezetlen háromszög is kétféleképpen színezhető. Vagyis itt a színek figyelembevételével $2 \cdot 2 = 4$ eset lehetséges.



*b*232)

*b*233) Ha a két piros egymással átellenes. Itt (látszólag) két eset van (felülről az óramutató járásával egyezően indulva): PZFZPFZF és PFZFPZFZ. Ezek viszont egy 180 fokos forgatással egymásba forgathatóak. Vagyis itt 1 eset van. A „$3, 3, 2$” esetben tehát $3 \cdot (2 + 4 + 1) = 21$ lehetőség van a színezésre.



*b*233)

Vagyis $3 + 6 + 6 + 21 = 36$-féleképpen színezhető ki a pörgettyű.

7. *a) Adjuk meg a $P(-1; 1)$, és $Q(3; 3)$ pontokon átmenő e egyenes egyenletét.*

b) Az $f(x) = x^2 - 6x + 8$ egyenletű függvény grafikonjának melyik az a pontja, amelyikbe húzott érintő merőleges a fenti $e = PQ$ egyenesre?

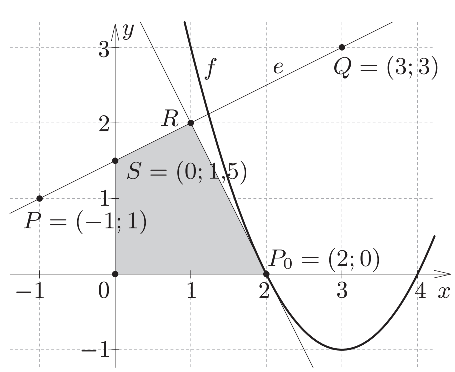
c) Adjuk meg az e egyenes, az érintő, illetve a két koordináta-tengely által bezárt (az első síknegyedbe eső) konvex négyszög területét. *(16 pont)*

Megoldás. *a)* A P-ből Q-ba mutató $\mathbf{v} = (4; 2)$ irányvektor alapján az egyenes meredeksége $\frac{1}{2}$. Emiatt az y-tengelyt $\frac{3}{2}$-nél metszi, vagyis a PQ egyenes egyenlete: $y = \frac{x+3}{2}$.

b) Az érintő pontosan akkor merőleges az iménti egyenesre, ha meredekségeik szorzata -1. Mivel a PQ egyenesének meredeksége $\frac{1}{2}$, így az érintő meredeksége -2.

Szükség van még az érintő egy pontjára. Ez például deriválással meghatározható. Az $f(x) = x^2 - 6x + 8$ függvény tetszőleges $P_0 = \big(x_0; f(x_0)\big)$ pontjába húzott érintő meredeksége éppen $f'(x_0) = 2x_0 - 6$. Ennek kell -2-nek lennie. Innen $x_0 = 2$, és így $P_0 = (2; 0)$ adódik az érintési pontra.

c) Foglaljuk az eddigieket egy *ábrába.* Az érintési ponton átmenő -2 meredekségű érintő egyenlete: $y = -2x + 4$. Nekünk az OP_0RS négyszög területe kell.



Az R pont az $y = -2x + 4$ és az $y = \frac{x+3}{2}$ egyenesek közös pontja. Az egyenletek jobb oldalát egyenlővé téve $-2x + 4 = \frac{x+3}{2}$, majd $x = 1$, és innen $y = 2$. Vagyis R koordinátái: $R(1; 2)$.

Innen az OP_0RS négyszög területe gyorsan meghatározható. Például az OP_0TV 2 oldalhosszú négyzet (ahol $T(2; 2)$, $V(0; 2)$) területéből kivonva a megfelelő $\frac{1}{4}$, illetve 1 területű, az OP_0RS-hez nem tartozó derékszögű háromszögek területét, a kérdéses terület:

$$T_{OP_0RS} = 4 - 1 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}.$$

8. *Egy téglatest térfogata* $8\ \mathrm{cm}^3$*. Ha a téglatest minden élét* 1 *centiméterrel megnöveljük, akkor egy* $27\ \mathrm{cm}^3$ *térfogatú téglatestet kapunk. Mekkora térfogatú téglatestet kapunk, ha ismét megnöveljük az éleket* 1-1 *centiméterrel?* (*16 pont*)

Megoldás. Jól látszik, hogy az eredeti téglatest lehet egy 2 cm élhosszú kocka. Kérdés az, hogy lehet-e más. Legyenek az eredeti téglatest egy csúcsba futó élei az a, b, c pozitív számok. Ekkor $abc = 8$ az eredeti térfogat.

Kétszer alkalmazzuk a háromtagú számtani-, és mértani közép közötti összefüggést. Először:

$$2 = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}, \quad \text{vagyis} \quad 6 \le a+b+c,$$

és egyenlőség csak az $a = b = c = 2$ esetben lehetséges. Másodszor:

$$4 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot bc} \le \frac{ab+ac+bc}{3}, \quad \text{vagyis} \quad 12 \le ab+ac+bc,$$

és egyenlőség csak az $a = b = c = 2$ esetben lehetséges. Az új térfogatra kapott feltétel szerint:

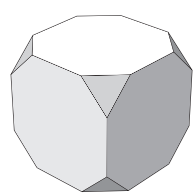
$$27 = (a+1)(b+1)(c+1) = abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 \ge 8 + 12 + 6 + 1 = 27.$$

Ez nyilván csak úgy lehet, ha $6 = a+b+c$ és $12 = ab+ac+bc$ egyaránt teljesül, vagyis, ha az eredeti téglatest kocka.

Azaz valóban csak a 2 cm élű kocka lehetett az eredeti test.

Így az újabb növelés után kapott téglatest térfogata: $4^3 = 64\ (\mathrm{cm}^3)$.

9. *Egy játékgyártó vállalat az* ábrának *megfelelő műanyag játékkockákat gyárt. A gyártás során elkészítik a „sértetlen”* 2 cm *élhosszú kockákat, majd a nyolc csúcs mindegyikénél az éleken kimérve az azonos* d *távolságokat levágnak egy-egy olyan tetraédert, melynek alaplapja szabályos háromszög. A levágott tetraéderek anyagát összegyűjtik, és ebből a hulladékanyagból később új játékkockákat gyártanak. (Ezek hulladékát is összegyűjtik. Általában nem kell anyagveszteséggel számolnunk a gyártás során, illetve a hulladékot nem keverik a nem hulladék anyaggal össze.)*



a) *Mekkora a* d *távolság pontos értéke, ha pontosan* 48 *darab játékkocka hulladékából állítható elő egy, mind a nyolc csúcsában ép* 2 cm *élhosszú kocka?*

b) *A nem hulladékanyagból készült kockák mind első osztályúak a minőség szempontjából, míg a hulladékból készült kockáknak csak* 80%*-a első osztályú, a többi hibás. A gyártó cég* 20 *éve változatlan feltételekkel, változatlan gyártósoron gyártja játékait. A hulladék- és a nem hulladékanyagból készült kockák a gyártás során egy tárolóba kerülnek, ahol összekeverednek. A jubileum alkalmából egy exkluzív* 200 *darabos játékkocka szettet adnak ki díszdobozba csomagolva. Mekkora az esélye, hogy a dobozba legalább két darab hibás dobókocka kerül?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Egy levágott kis tetraéder térfogata:

$$V = \frac{d \cdot \frac{d \cdot d}{2}}{3} = \frac{d^3}{6}.$$

Vagyis a hulladék mennyisége egy kockánál: $\frac{8d^3}{6}$. A szöveg alapján:

$$48 \cdot \frac{8d^3}{6} = 64d^3 = 2^3, \quad \text{innen} \quad d^3 = \frac{1}{8}, \quad \text{és végül} \quad d = \frac{1}{2}.$$

Vagyis a kérdéses d távolság éppen 5 mm.

b) Legyen pontosan 48 ép kockára való anyagunk. Abból legyárthatunk 48 csonkolt dobókockát, és azok maradékából pontosan egy újabb ép kockát kapunk. Vagyis 48 ép egységnyi anyagból 1 ép egységnyi maradék keletkezik. Mivel nem kell anyagveszteséggel számolni, a gyártás során felhasznált teljes anyagmennyiség $\frac{1}{48}$ része készül hulladék anyagból.[1]

Az összes kocka

$$\frac{1}{48} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{240}$$

[1] Húsz éve változatlan feltételekkel gyártják a kockákat, tehát tekinthetjük úgy, hogy a kockagyártás folyamata hosszú távú, rendszeresen érkezik friss nyersanyag, és az összes hulladék felhasználásra kerül.

része hibás, és így $\frac{239}{240}$ eséllyel első osztályú egy játékkocka.

Számoljuk ki a komplementer esetet, vagyis azt, hogy mekkora az esély arra, hogy pontosan 0 vagy 1 darab hibás kocka van:

$$P(0\text{ hibás}) = \left(\frac{239}{240}\right)^{200} \approx 0{,}4338, \quad \text{illetve}$$
$$P(1\text{ hibás}) = \binom{200}{1} \cdot \left(\frac{239}{240}\right)^{199} \cdot \left(\frac{1}{240}\right)^{1} = 200 \cdot \frac{239^{199}}{240^{200}} \approx 0{,}3630.$$

Annak az esélye, hogy pontosan 0 vagy 1 darab kocka hibás, kb. $0{,}4338 + 0{,}3630 = 0{,}7968$, azaz annak a valószínűsége, hogy a szettben legalább két darab hibás játékkocka van, körülbelül 20,32%.