# I. rész

**1.** Milyen $\alpha$ valós paraméter esetén lesz a következő egyenletnek egy megoldása?

$$\frac{x^2\cos\alpha + x + \frac{1}{2}\sin\alpha}{x^2 - \frac{1}{2}} = 0.$$

(*11 pont*)

**2.** Óvodás korú kisöcsénk a játék rulett-zsetonokat használja toronyépítésre. Az első korongoszlop mellé magasabbat állít, majd a következőket ugyanannyival növeli, mint a korábbiakat. Így egy lépcsős toronysorozatot hoz létre mackójának.

*a*) Milyen sorozatot alkotnak a tornyok magasságai?

*b*) Az első toronytól kezdve csoportosítsuk a tornyokat hármasával. Igazoljuk, hogy a hármas csoportokban szereplő tornyok magasságainak összege számtani sorozatot alkot.

*c*) A sorba rendezett tornyok elejéről kisöcsénk elvett $n$ darab tornyot, majd megszámoltatta velünk, hogy hány zsetonja van összesen. Ezután elvett még $n$ db tornyot, s ismét megkérdezte, hogy az előzővel együtt most hány zsetonja is van. Ebből a két adatból meg tudnánk-e mondani, hogy még $n$ tornyot elvéve, hány zsetonunk is lesz az előzőkkel együtt? (*12 pont*)

**3.** Az $A$ halmaz elemei olyan 100-nál kisebb pozitív $a$ egészek, melyekre $\sin(a\cdot 10°) = 0{,}5$. A $B$ halmaz elemei a 100-nál kisebb hattal osztható természetes számok.

*a*) $|A| =?$ $\qquad |B| =?$

*b*) Definiáljuk a $C$ halmazt a következőképpen: $C := \{1; 2; 3; 6; A\}$, ahol az $A$ halmaz a $C$ eleme. $|C \setminus B| =?$

*c*) Hány páros elemű részhalmaza van $C$-nek? (*14 pont*)

**4.** A Balaton valósághű modelljét szeretnénk elkészíteni. Az adatok szerint a Balaton hossza 77 km, felszíne 594 km$^2$, átlagos mélysége 3,6 m, legmélyebb pontja 11 m.

*a*) Hány centiméter mélyen lesz a modellünk legmélyebb pontja a felszínhez képest, ha annak hossza a terepasztalon 1 m?

*b*) Mennyi a modellünk léptéke (méretaránya)?

*c*) Hány centiliter víz kell a modellhez, ha azt valóban vízzel szeretnénk feltölteni?

*d*) A Balatont egy helikopterről fentről is megtekintjük, hogy lássuk, mennyire hasonlít a modellünkre. A tó két legtávolabbi, egymástól 77 km-re lévő pontját nézzük hossztengelyére merőlegesen, középpontja felé repülve. 4 km távolságban, 900 m magasról mekkora szögben látjuk a tavat? (*14 pont*)

# II. rész

**5.** Egy bank a következő ajánlattal kívánja ügyfelei körét bővíteni: aki a megadott határidőig pénzét áthozza a fiókba fél éves lekötéssel, az első hat hónapban évi 5% kamatot kap. Az *apró betűs részt* elolvasva megtudhatjuk, hogy fél év után havi lekötéssel, évi 1,5% kamattal marad a fiókban a pénzünk. (A havi lekötés azt jelenti, hogy amennyiben előbb vesszük ki a pénzünket, a teljes kamatot elveszítjük a csonka hónapra.) 1 millió forintot teszünk be a bankba. Ezen feltételek ismeretében válaszoljunk a következő kérdésekre.

*a*) Mennyi pénzünk lesz fél év múlva?

*b*) Mennyit kamatozott egy év alatt a betett 1 millió forintunk?

*c*) Korábbi bankfiókunkban hagyva a pénzünket évi 2%-os a kamatot kapnánk havi lekötés mellett. Legfeljebb mennyi időre éri meg áthozni a pénzünket az új helyre? (*16 pont*)

**6.** Ugorjunk másfél évet. Az egyetemek új előírása miatt a 2017-es érettségin igen sokan választották a matematikát emelt szinten. 10%-uknak 90% feletti lett az eredménye.

*a*) Az emelt szinten érettségiző diákok közül véletlenszerűen megkérdezve 10-et mekkora annak az esélye, hogy közülük pontosan ketten 90% feletti érettségit tettek?

*b*) Internetes felmérésen 100 diákot kérdeztek meg véletlenszerűen az emelt szinten érettségizők közül. Mekkora a valószínűsége, hogy legfeljebb 2-en vizsgáztak 90% feletti eredménnyel? És annak, hogy a 100 megkérdezett diákból legfeljebb ketten vannak azok, akiknek nem sikerült 90% felett az eredményük?

*c*) (Az emelt szinten túlmutató kérdés.) Az OH statisztikájában kutakodunk. A 40 000 emelt szintű vizsgázó eredményét tekintve 90%-os biztonsággal hány 90% feletti eredményes vizsgázóra számíthatunk? (*16 pont*)

**7.** Adott a valós számok halmazán értelmezett $f$ függvény:

$$f: x \longmapsto \frac{x}{1-|x|}.$$

$a$) Ábrázoljuk a függvényt a $]-1;2] \setminus \{1\}$ intervallumon.
$b$) Adott a $g(x)=2x$ függvény. Mi lesz az $f\circ g$ függvény értékkészlete a $]-1;2]$ intervallumon?
$c$) Határozzuk meg az $f$ függvény inverzét a $]-1;1[$ intervallumon, s ábrázoljuk az $f^{-1}$ függvényt. (*16 pont*)

**8.** Lakásunk nappali szobája hatszög alakú, melynek oldalai rendre $AB=3{,}4$, $BC=2{,}3$, $CD=2{,}3$, $DE=2{,}3$, $EF=3{,}4$, valamint $FA=3{,}7$ méteresek. Az $AB$ és a $BC$, valamint az $DE$ és az $EF$ oldalak merőlegesek egymásra. A szoba parkettázásához szeretnénk megállapítani az alapterületét, melyet kétféleképpen teszünk meg.

Mi megmérjük a szoba $AD$ átlóját, melyet 4,8 méteresnek találunk, míg fiaink a szoba $F$ csúcsánál lévő szöget határozzák meg, melyet $120^\circ$-nak mérnek. A hosszúságot 5 cm-es pontossággal, míg a szöget $5^\circ$-os pontossággal tudjuk eszközeinkkel megmondani.
$a$) A szög vagy a hosszúság relatív hibája nagyobb?
$b$) Mekkorák a területek a két esetben?
$c$) Mennyire pontosan ismerjük a két esetben az $AD$ átlót?
$d$) Melyik mérést fogadjuk el inkább? (*16 pont*)

**9.** A mérnökök egy gépkocsi mozgását figyelték műszerek segítségével négy másodpercen át. A pillanatnyi sebességek (m/s-ban) mért adataira a számítógép a következő függvényt illesztette:

$$v(t)=2{,}5t^3-16t^2+33t+5.$$

$a$) Mekkora sebességre gyorsult fel az autó az első másodperc végére?
$b$) A sebességváltás pillanatában nem gyorsult az autó. Mikor volt ez?
$c$) A gépkocsi pillanatnyi fogyasztását (centiliterben mérve) a következő függvény írja le:

$$F(t)=2\cdot 10^{-2}\cdot \big(v'(t)+50t\big).$$

Hány centiliter üzemanyag fogyott az első két másodperc alatt? (*16 pont*)