Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2016. évi Eötvös-versenye október 14-én délután 3 órai kezdettel tizennégy magyarországi helyszínen[1] került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 77 versenyző adott be dolgozatot, 18 egyetemista és 59 középiskolás.

Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.

*

**1. feladat.** *Vízszintes helyzetű, elegendően nagy méretű, téglalap alakú rajztáblán egy begrafitozott kicsiny pénzérme fekszik. A rajztáblát saját síkjában mozgatni kezdjük úgy, hogy középpontja $R$ sugarú körön haladjon $\omega$ szögsebességgel, miközben oldalai az eredeti helyzetükkel mindvégig párhuzamosak maradnak. Az érme és a rajztábla közötti súrlódási együttható $\mu$, melynek értéke elég kicsi ahhoz, hogy az érme folyamatosan csússzon.*

*Hogyan mozog az érme hosszabb idő után? Milyen nyomot hagy eközben a rajztáblán?*

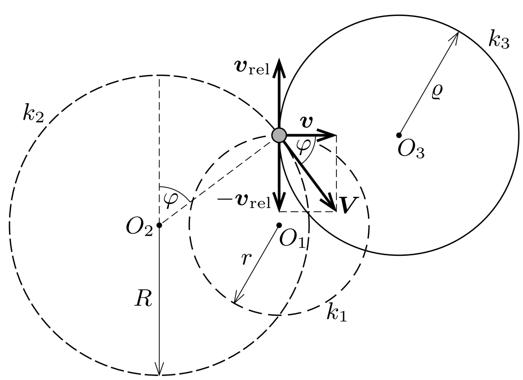
*(*Vigh Máté*)*

**Megoldás.** Ha a rajztábla és a pénzérme között a súrlódási tényező elegendően nagy lenne ($\mu > R\omega^2/g$), akkor a pénzérme nem csúszna meg, hanem a táblához tapadva követné annak mozgását. A feladat szövege szerint nem ez a helyzet, így a rajztábla indításakor a pénzérme azonnal megcsúszik. Sejthető, hogy néhány periódusidőnyi átmeneti (tranziens) szakasz után az érme mozgása állandósul. Megmutatjuk, hogy az egyenletes körmozgást végző pénzérme kielégíti a Newton-féle mozgásegyenletet.

Az $m$ tömegű pénzérmére vízszintes irányban egyetlen erő hat: a $\mu mg$ nagyságú, de állandóan változó irányú csúszási súrlódási erő. Stacionárius körmozgás esetén az érme sebességének nagysága állandó, ezért a súrlódási erő mindig merőleges a sebességvektorra. A pénzérme körmozgásának szögsebessége nem lehet más, mint a rajztábla mozgásának $\omega$ körfrekvenciája. A körpálya $r$ sugarát a mozgásegyenletből határozhatjuk meg:

$$\mu mg = mr\omega^2, \qquad \text{ebből} \qquad r = \frac{\mu g}{\omega^2}. \tag{1}$$

Érdekes, hogy $r$ nem függ a rajztábla pályájának $R$ sugarától.




*1. ábra*

Most térjünk rá arra a kérdésre, hogy milyen nyomot hagy az érme a rajztáblán! Ehhez a két test relatív mozgását kell elemezni. Az *1. ábrán* látható $r$ sugarú $k_1$ kör a pénzérme pályáját mutatja az álló vonatkoztatási rendszerben, az $R$ sugarú $k_2$ kör a rajztábla éppen az érmével érintkező pontjának későbbi pályáját jelzi, végül pedig a $\varrho$ sugarú $k_3$ kör a táblán hagyott grafitnyomnak felel meg. Az érmére ható csúszási súrlódási erő az $O_1$ pont felé mutat, ezzel ellentétes tehát az érme rajztáblához viszonyított $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}$ sebessége. Az érme álló vonatkoztatási rendszerhez viszonyított $\boldsymbol{v}$ sebessége viszont erre merőleges, így a rajztábla érmével éppen érintkező pontjának $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}$ sebességére fennáll a Pitagorasz-tétel:

$$\boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{v}^2 + \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}^2. \tag{2}$$

Mivel az állandósult mozgásszakaszban mindhárom sebességvektor $\omega$ szögsebességgel forog az időben, a nagyságukat kifejezhetjük a körpályák sugarával:

$$|\boldsymbol{V}| = R\omega, \qquad |\boldsymbol{v}| = r\omega, \qquad |\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}| = \varrho\omega,$$

amelyeket a (2) egyenletbe írva a sugarak között kapunk összefüggést:

$$R^2 = r^2 + \varrho^2.$$

[1] Részletek a verseny honlapján: http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm.

Ezt és az (1) eredményt felhasználva megkapjuk a pénzérme által a rajztáblán hagyott kör alakú grafitnyomok $\varrho$ sugarát:

$$\varrho = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\mu g}{\omega^2}\right)^2}.$$

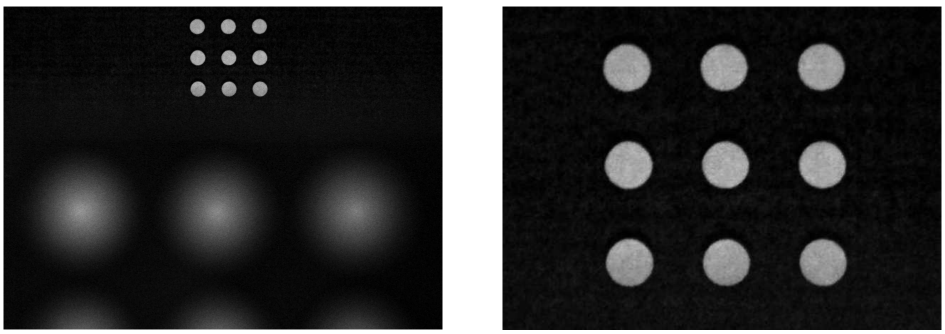
Az érme megcsúszásának $\mu < R\omega^2/g$ feltétele miatt ez mindig valós.

*Megjegyzés.* Az ábráról leolvasható, hogy az érme mozgása nincs szinkronban a rajztábla mozgásával, hanem ahhoz képest folyamatosan „késik". A fáziskésés $\varphi$ szögét is a sebességvektorok által kifeszített derékszögű háromszög segítségével határozhatjuk meg:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{V}|} = \frac{r}{R} = \frac{\mu g}{R\omega^2},$$

amely csúszó érme esetén biztosan kisebb 1-nél.

**2. feladat.** *Két egyforma, fekete lapon kilenc-kilenc kicsi fehér pötty van. A szomszédos pöttyök középpontjának távolsága* 5,8 mm. *A lapokról egy fényképezőgéppel képet készítettünk: a fényképezőgép a távolabbi, a lencsétől* 25 cm *távolságra lévő lapról éles képet adott, a közelebbiről viszont elmosódott a kép* (2. ábra). *A bal oldali ábrán a teljes kép látható, a jobb oldali ábrán pedig a kép tetejének kinagyított részlete. A fényképezőgép lencséjének fókusztávolsága* 18 mm.



*2. ábra*

*Becsüljük meg a megadott és a képekről lemért adatokból a közelebbi lap távolságát a lencsétől, valamint a fényképezőgép lencséjének átmérőjét!*

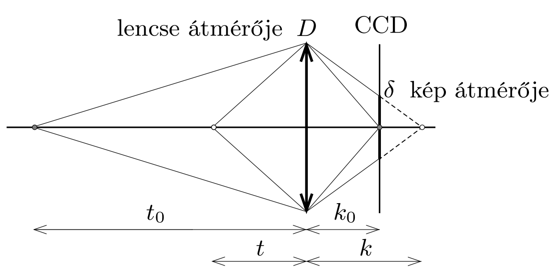
(Tichy Géza, Vankó Péter)

**Megoldás.** A feladat megoldásának lényege, hogy megértsük, miért lesz a közelebbi tárgy képe elmosódott. A *3. ábrán* két pontszerű tárgy képe látható. A távolabbiról a lencse pontosan a CCD érzékelő síkjában hoz létre éles, pontszerű képet. A közelebbiről viszont távolabb keletkezne éles kép, így a CCD-n egy elmosódott, $\delta$ átmérőjű folt keletkezik. Az ábráról leolvasható, hogy

$$\frac{D}{\delta} = \frac{k}{k - k_0},$$

a leképzési törvény alapján pedig:

$$\frac{1}{t_0} + \frac{1}{k_0} = \frac{1}{f} \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}.$$

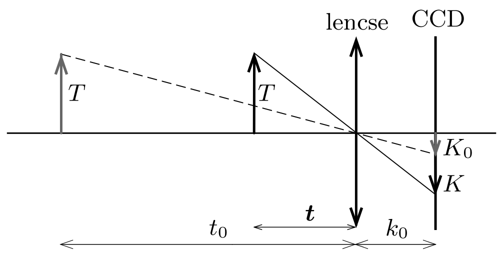



*3. ábra*

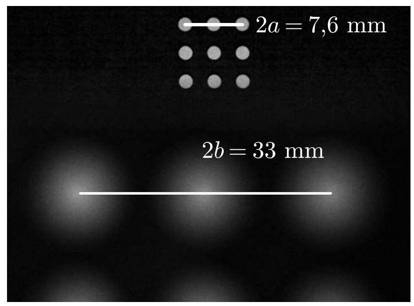
A *4. ábra* alapján a közelebbi tárgy távolsága a két kép nagyításának arányából határozható meg:

$$\frac{K_0}{T} = \frac{k_0}{t_0},$$
$$\frac{K}{T} = \frac{k_0}{t},$$
$$\lambda = \frac{K}{K_0} = \frac{t_0}{t}.$$

A 2. ábra bal oldali részéről leolvasható a szélső pöttyök középpontjának távolsága (a szomszédos pöttyök távolságának kétszerese) mindkét képen (*5. ábra*).




*4. ábra*



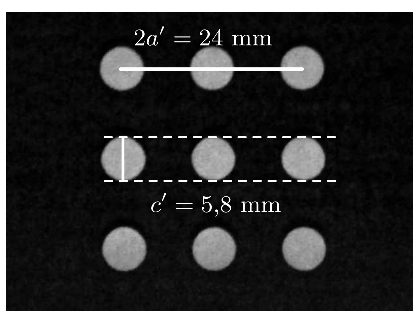

*5. ábra*

Ebből:

$$\lambda = \frac{K}{K_0} = \frac{2b}{2a} = \frac{33\ \text{mm}}{7{,}6\ \text{mm}} = 4{,}34,$$
$$t = \frac{t_0}{\lambda} = \frac{25\ \text{cm}}{4{,}34} = 5{,}8\ \text{cm}.$$

A 2. ábra jobb oldali (nagyított) részén leolvasható a pöttyök átmérőjének és távolságának aránya (*6. ábra*). Ebből:

$$\varrho = \frac{c'}{a'} = 2\frac{c'}{2a'} = 2 \cdot \frac{5{,}8\ \text{mm}}{24\ \text{mm}} = 0{,}48.$$



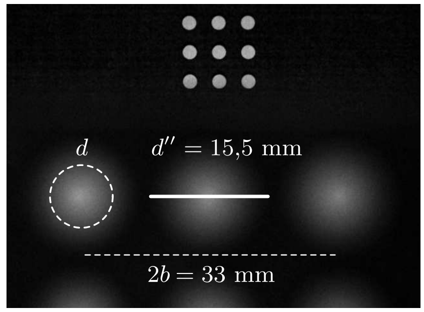

*6. ábra*

Ez alapján kiszámíthatjuk, hogy mekkora lenne a 2. ábra bal oldali felén a közelebbi pöttyök átmérője, ha nem lenne elmosódva (*7. ábra*):

$$d = \varrho b = \varrho \frac{2b}{2} = 0{,}48 \cdot \frac{33\ \text{mm}}{2} = 8{,}0\ \text{mm}.$$

Ugyanitt leolvasható az elmosódott kép átmérője is: $d'' = 15{,}5$ mm. A két átmérő különbsége a kép elmosódottsága (ekkora lenne egy pontszerű tárgy elmosódott képe ezen a képen):

$$e = d'' - d = 7{,}5\ \text{mm}.$$




*7. ábra*

Ezután már csak néhány számítás van hátra. A *3. ábrán* jelölt képtávolságok:

$$k_0 = \frac{t_0 f}{t_0 - f} = 19{,}4\ \text{mm},$$
$$k = \frac{tf}{t-f} = 26{,}2\ \text{mm}.$$

Két pötty távolsága a fényképezőgép CCD érzékelőjén (ez a távolság a valóságban $a_0 = 5{,}8$ mm, meg van adva):

$$a_{\text{CCD}} = \frac{k_0}{t_0} a_0 = \frac{19{,}4\ \text{mm}}{250\ \text{mm}} \cdot 5{,}8\ \text{mm} = 0{,}45\ \text{mm},$$

amiből a 2. ábra bal oldali képének nagyítása a CCD-n kialakuló képhez viszonyítva:

$$N = \frac{a}{a_{\text{CCD}}} = \frac{2a}{2a_{\text{CCD}}} = \frac{7{,}6\ \text{mm}}{2 \cdot 0{,}45\ \text{mm}} = 8{,}4.$$

Ebből az elmosódottság a CCD érzékelőn:

$$\delta = \frac{e}{N} = \frac{7{,}5\ \text{mm}}{8{,}4} = 0{,}9\ \text{mm},$$

amiből viszont a keresett lencseátmérő a *3. ábra* alapján:

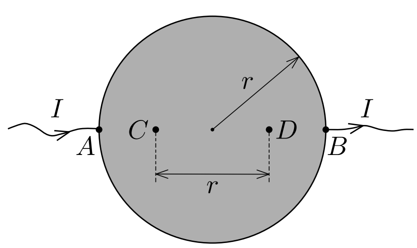
$$D = \delta \frac{k}{k - k_0} \approx 3{,}5\ \text{mm}.$$

*Megjegyzések.* 1. A kérdezett mennyiségek hibájára csak becslést adunk. A lehető legpontosabb (tized mm-es) leolvasás és egy kicsit „nagyvonalúbb” (fél mm pontos) leolvasás adataival is végigszámolva azt kapjuk, hogy a közelebbi tárgy távolságára kapott eredmény hibája 1–2%, a lencse átmérő hibája pedig 10–15%.

2. A közelebbi tárgy távolságát azért kérdeztük, hogy segítsük a gondolatmenetet. Ezt több versenyző is meghatározta, de nem tudtak továbblépni. Egyetlen helyes megoldón kívül szinte senki nem tudta helyesen értelmezni a kép elmosódottságát; néhányan a fény elhajlásával próbálták megmagyarázni, ami szintén helytelen.

**3. feladat.** *Egy $r$ sugarú, $d$ vastagságú ($d \ll r$), $\varrho$ fajlagos ellenállású fémkorong $A$ pontjába $I$ erősségű áramot vezetünk, $B$ pontjából pedig elvezetjük azt.*

*Mekkora feszültség mérhető a* 8. ábrán *látható $C$ és $D$ pontok között?*




*8. ábra*

**Megoldás.** A fémkorong vizsgálata előtt érdemes egy végtelen fémlemez esetéből kiindulni. Képzeljük el, hogy egy végtelen fémlap $A$ pontjába $2I$ áramot vezetünk, a $B$ pontból pedig elvezetjük azt. Ha csak az $A$ jelű elektróda lenne jelen, a fémlemezben a bevezetett áram izotrop módon terjedne szét, így az $A$ ponttól $r_1$ távolságra az áramsűrűség nagysága

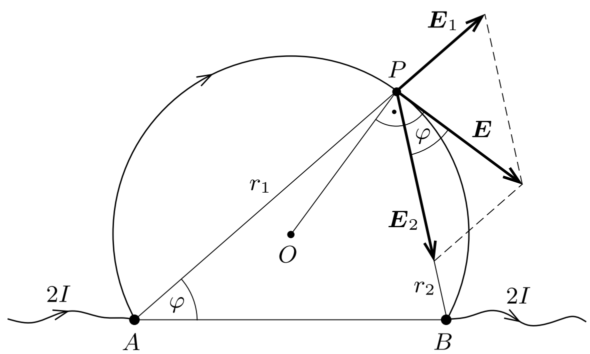
$$j_1 = \frac{2I}{2\pi r_1 d}$$

lenne. A differenciális Ohm-törvény értelmében ezt az áramsűrűséget a lemezben megjelenő $E_1 = \varrho j_1$ térerősségű elektromos mező tartja fenn, így az $A$ elektróda hatására a végtelen fémlemezben az $r_1$ távolsággal fordítottan arányos erősségű, az $A$ ponttal ellentétes irányba mutató, „sugaras" elektromos mező alakul ki. Hasonlóan, ha csak a $B$ jelű csatlakozó lenne jelen, akkor $r_2$ távolságban $E_2 = 2\varrho I/(2\pi r_2 d)$ térerősségű, a $B$ pont felé mutató elektromos tér jönne létre. Mivel mindkét elektróda jelen van, így a lemezben kialakuló elektromos tér (és áramsűrűség) az előbbi két eset szuperpozíciójaként (vektori összegeként) számolható.

Tekintsük most a végtelen fémlemez tetszőleges $P$ pontját (lásd a *9. ábrát*)! Itt az $A$ és $B$ elektródák hatására külön-külön $\boldsymbol{E}_1$ és $\boldsymbol{E}_2$ térerősség alakul ki, melyek nagyságára az eddigiek szerint fennáll az

$$\frac{|\boldsymbol{E}_1|}{|\boldsymbol{E}_2|} = \frac{r_2}{r_1}$$

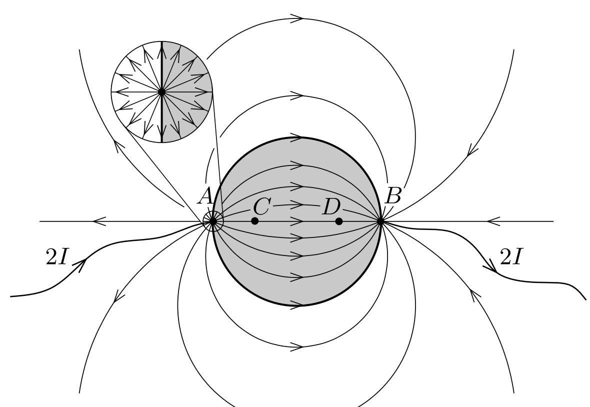
egyenlőség. Ebből és a váltószögek egyenlőségéből látszik, hogy az $ABP$ háromszög hasonló a térerősségvektorok által meghatározott háromszöghöz, ezért az eredő térerősségvektor a $PB$ szakasszal ugyanakkora szöget zár be, mint a $PAB$ szög. Ez viszont azt jelenti, hogy az $ABP$ háromszög ($O$ középpontú) köréírt körét a $P$ pontbeli eredő térerősség érinti, hiszen van két szögünk ($PAB\sphericalangle$, illetve az $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{E}_2$ vektorok által bezárt szög), melyek egyenlőségük miatt a kör ugyanazon $PB$ ívéhez tartozó kerületi szögek.




*9. ábra*

A fentiekből következik, hogy az eredő térerősségvektor a fémsík tetszőleges pontjában érintője az $A$, $B$ és a kiszemelt pontra illeszkedő körívnek, a lemezben kialakuló elektromos erővonalak (és így az áramvonalak is) tehát *körív alakúak,* melyek átmennek az $A$ és $B$ pontokon.

Most vágjuk ki gondolatban a végtelen fémlapból a *10. ábrán* látható, a feladatnak megfelelő korong alakú részt! A korong pereme mentén az áramok a kivágás előtt is érintő irányban folytak, így az áramokra kirótt határfeltétel automatikusan teljesül. A korong kivágása tehát nem változtatja meg sem a külső, sem a belső árameloszlást, és így a feszültségviszonyokat sem. A végtelen fémlapban az áram be- és kivezetési pontjának közvetlen közelében az árameloszlás izotrop volt (itt a távolabbi elektróda hatása már nem érződik), így a korong kivágása előtt a fémlemezbe vezetett $2I$ erősségű áramnak pontosan a fele jutott be a korongba (lásd a 10. ábra kinagyított részletét). A feladatbeli kérdés tehát egyenértékű azzal, hogy mekkora volt a feszültség a végtelen fémlap $C$ és $D$ pontjai között a korong kivágása előtt.




*10. ábra*

Az $A$ pontban bevezetett $2I$ áram hatására az elektródától $r$ távolságra a fémlap potenciálja (az $A$ és $B$ pontok között félúton, a korong középpontjában elhelyezkedő referenciaponthoz képest) a térerősség integrálásával kapható meg:

$$\Phi(r_1) = \int_{r_1}^{r_0} E_1(r')\,\mathrm{d}r' = \frac{2\varrho I}{2\pi d}\int_{r_1}^{r_0} \frac{1}{r'}\,\mathrm{d}r' = -\frac{\varrho I}{\pi d}\ln\frac{r_1}{r_0},$$

ahol $r_0 = r$. Ennek felhasználásával az $A$ pontbeli elektróda által a $C$ és $D$ pontok között létrehozott feszültség nagysága

$$U_{CD}^{(A)} = \frac{\varrho I}{\pi d}\left(-\ln\frac{r}{2r_0} + \ln\frac{3r}{2r_0}\right) = \frac{\varrho I}{\pi d}\ln 3.$$

Ugyanekkora potenciálkülönbséget hoz létre a $B$ jelű elektróda is, így a szuperpozíció értelmében a $C$ és $D$ pontok között eső feszültség

$$U_{CD} = U_{CD}^{(A)} + U_{CD}^{(B)} = 2U_{CD}^{(A)} = \frac{2\varrho I}{\pi d}\ln 3.$$

Ekkora tehát a kivágott fémkorong $C$ és $D$ pontjai közötti feszültség is.

*

Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2016. november 18-án délután került sor az ELTE TTK Konferenciateremben. Meghívást kaptak az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny nyertesei is. Jelen volt az 50 évvel ezelőtti győztes *Rácz Miklós* és a 25 évvel ezelőtti díjazottak közül *Gefferth András, Miklós György* és *Rózsa Balázs.* Utóbbi az akkori feladatok ismertetése után röviden beszélt a versennyel kapcsolatos emlékeiről és pályájáról.

Ezután következett a 2016. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. és 3. feladat megoldását Tichy Géza, a 2. feladatét Vankó Péter ismertette.

Az esemény végén került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Patkós András,* az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

Egyetlen versenyző sem oldotta meg mindhárom feladatot, így a versenybizottság nem adott ki első díjat.

Két feladat helyes megoldásáért *második díjat* nyert **Kovács Péter Tamás,** a Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Juhász Tibor* és *Pálovics Róbert* tanítványa valamint **Tompa Tamás Lajos,** a miskolci Földes Ferenc Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Zámborszky Ferenc* és *Kovács Benedek* tanítványa.

Egy feladat helyes megoldásáért *harmadik díjat* nyert **Forrai Botond,** a budapesti Baár-Madas Református Gimnázium érettségizett tanulója, *Horváth Norbert* tanítványa – a BME fizikus hallgatója; **Lajkó Kálmán,** a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Mező Tamás* tanítványa, valamint **Simon Dániel Gábor,** a Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Bakk János* tanítványa.

A második díjjal *Zimányi Gergely* adományából nettó 40 ezer, a harmadik díjjal nettó 25 ezer forint pénzjutalom járt, a díjazottak tanárai pedig a Typotex Kiadó könyvutalványait kapták. A verseny megszervezését az Eötvös Loránd Fizikai Társulat a MOL támogatásából fedezte.