Szakaszok ekvioptikus görbéi

Bevezető

Ekvioptikus, azaz egyenlő látószögű. Ha adott a síkon két görbe, úgy azok ekvioptikus görbéjén (röviden ekvioptikusán) azon pontok mértani helyét értjük, melyekből a két görbe ugyanakkora szögben látszik. A látószög annak a legkisebb szögnek a nagysága, amelynek szögszárain kívül nincs pontja a görbének.

Találkozhatunk még az *izoptikus* kifejezéssel, mely jelentése állandó látószögű. Adott egy síkgörbe és egy rögzített α szög. Ekkor azon pontok mértani helye, melyekből a görbe α szögben látszik, a görbe α-izoptikusa. Amennyiben $\alpha = 90^\circ$, úgy az α-izoptikust *ortoptikusnak* is nevezzük. Két görbe azonos szögű izoptikusainak metszéspontjai alkotják tehát az ekvioptikus görbét.

Az olvasó például meggondolhatja, hogy két nem metsző kör ekvioptikusa egy harmadik kör, egy parabola ortoptikusa egyenes, míg az ellipszisek és hiperbolák ortoptikusai körök. Az ellipszisek és hiperbolák α-izoptikusai általában negyedrendű görbék.

Jelen cikkünkben szakaszok ekvioptikusait fogjuk vizsgálni, azzal a kiegészítéssel, hogy a szögeket irányítottan nézzük, modulo 180°. Ez biztosítja azt a kényelmet, hogy például egy szakasz α-izoptikusa a teljes körvonal legyen (ne pedig két külön körív, melyek egymás tükörképei a szakasz egyenesére).

Definíció. Adottak a síkon az A, B, C, D pontok. Az AB és CD szakaszok *ekvioptikus görbéjének* nevezzük és $S(A,B,C,D)$-vel jelöljük azon pontok mértani helyét, melyekből a két szakasz egyenlő irányított szögben látszik:

$$S(A,B,C,D) = \big\{P \mid APB\sphericalangle \equiv CPD\sphericalangle \pmod{180^\circ}\big\}.$$

Megjegyezzük, hogy pl. A-hoz „nagyon közeli” P pontokra az $APB\sphericalangle$ minden lehetséges értéket felvesz, ezért $P = A$ esetén a fenti egyenlőséget igaznak tekintjük. Tehát az A, B, C, D pontok is elemei a fenti halmaznak.

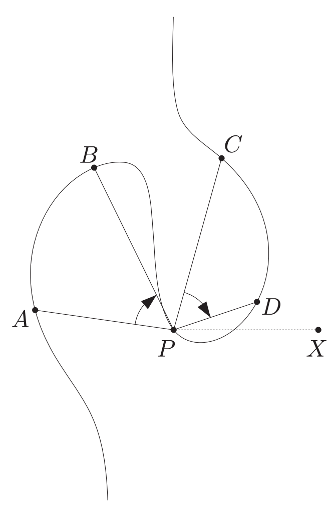
A görbe néhány tulajdonsága

1. állítás. *Két szakasz ekvioptikusa mindig egy legfeljebb harmadrendű görbe.*

Bizonyítás. Legyenek a pontok koordinátái $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$, $D(d_1,d_2)$ és $P(x,y)$, továbbá legyen P merőleges vetülete az y-tengelyre $X(0,y)$ (*1. ábra*). Ekkor az APB szög tangense kifejezhető az AP és BP szakaszok m_a, m_b meredeksége, és a tangens addíciós képlete alapján:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} APB\sphericalangle &= \frac{\operatorname{tg} APX\sphericalangle - \operatorname{tg} BPX\sphericalangle}{1 + \operatorname{tg} APX\sphericalangle \operatorname{tg} BPX\sphericalangle} = \\ &= \frac{m_a - m_b}{1 + m_a m_b} = \frac{\frac{y-a_2}{x-a_1} - \frac{y-b_2}{x-b_1}}{1 + \frac{y-a_2}{x-a_1} \cdot \frac{y-b_2}{x-b_1}} = \\ &= \frac{(y-a_2)(x-b_1) - (y-b_2)(x-a_1)}{(x-a_1)(x-b_1) + (y-a_2)(y-b_2)} = \\ &= \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}.\end{aligned}$$

A számlálóban az xy tag éppen kiesik, ezért f_1 elsőfokú, f_2 pedig másodfokú polinom. Ugyanígy, $\operatorname{tg} CPD\sphericalangle = g_1(x,y)/g_2(x,y)$, ahol g_1 elsőfokú, g_2 másodfokú. Mivel $\operatorname{tg} APB\sphericalangle = \operatorname{tg} CPD\sphericalangle$ éppen ekvivalens azzal, hogy $APB\sphericalangle \equiv CPD\sphericalangle \pmod{180^\circ}$, a keresett görbe egyenlete $f_1/f_2 = g_1/g_2$, azaz $0 = f_1 g_2 - f_2 g_1$, ami valóban (legfeljebb) harmadrendű görbe.



1. ábra

2. állítás. *Amennyiben $ABDC$ deltoid, úgy $S(A,B,C,D)$ egy kör és egy egyenes uniója.*

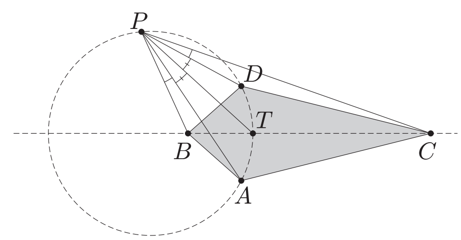
1. bizonyítás (*Koordinátageometria*). Legyen a deltoid szimmetriatengelye pl. BC, és vegyük fel a koordinátarendszert úgy, hogy BC legyen az x-tengely, AD pedig az y-tengely. Ekkor $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, $c_2 = 0$, $d_1 = 0$, $a_2 + d_2 = 0$, így a $0 = f_1 g_2 - f_2 g_1$ egyenlet egy kis számolással a következő alakra hozható:

$$0 = y \cdot \big((x^2 + y^2)(b_1 + c_1) + x\big(2a_2^2 - 2b_1c_1\big) - a_2^2(b_1 + c_1)\big).$$

Az első tényező az $y = 0$ egyenes, a második tényező pedig egy kör egyenlete, hiszen x^2 és y^2 együtthatói megegyeznek, és nincs xy tag.

Ebből a megoldásból az derült ki, hogy az egyenes a deltoid szimmetriatengelye, a kör pedig tükrös erre az egyenesre.

2. bizonyítás (*Apollóniusz-kör*). Vegyünk egy tetszőleges P pontot az ekvioptikus görbéről, és legyen T az APD kör és a BC egyenes (egyik) metszéspontja (*2. ábra,* az ekvioptikus szaggatott vonallal van jelölve). Ekkor szimmetria miatt T az AD ív felezőpontja, így $APT\sphericalangle \equiv TPD\sphericalangle$. Ezt hozzáadva ahhoz, hogy $BPA\sphericalangle \equiv DPC\sphericalangle$, azt kapjuk, hogy $BPT\sphericalangle \equiv TPC\sphericalangle \pmod{180^\circ}$.

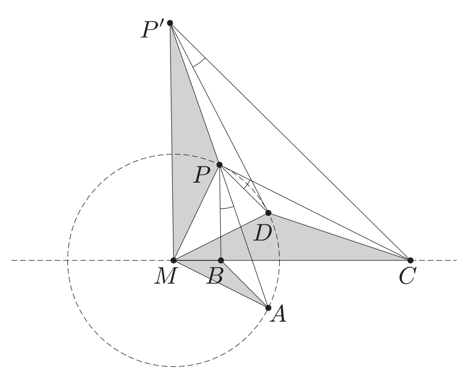


2. ábra

Az $APDT$ kör tükrös BC-re, és T rajta van $BPC\sphericalangle$ szögfelezőjén, ezért ez a kör nem más, mint a B, C pontok T-n átmenő Apollóniusz-köre (amennyiben P nincs rajta a BC egyenesen). Mivel D is rajta van ezen az Apollóniusz körön, ezért tetszőleges P pont esetén $BP/PC = BD/DC$, vagyis az $APDT$ kör állandó. Így P mértani helye a B, C pontok D-n átmenő Apollóniusz-köre, továbbá a nyilvánvaló BC egyenes.

Ebből a megoldásból az is kiderült, hogy a mértani helyként kapott kör nem csak egyszerűen tükrös az egyenesre, hanem egy konkrét Apollóniusz kör. Ezt szintén érdemes megjegyezni.

3. bizonyítás (*Forgatva nyújtás*). Legyen M azon φ forgatva nyújtás középpontja, melyre $\varphi(AB) = CD$ (*3. ábra*). Ismert, hogy ekkor M rajta van az AB, BD, DC, CA egyenesek közül bármely három által meghatározott háromszög köréírt körén. Legyen P egy pont az M középpontú MD sugarú k körön. Amennyiben a φ forgatva nyújtás során az ABP háromszög képe CDP', úgy létezik olyan M középpontú φ' forgatva nyújtás is, melyre $\varphi'(BD) = PP'$.



3. ábra

Ekkor a φ forgatva nyújtás miatt $MDC_\triangle \sim MBA_\triangle$, a deltoid szimmetriája miatt az $MBA_\triangle$ és $MBD_\triangle$ háromszögek egybevágóak és ellentétes körüljárásúak, a φ' forgatva nyújtás miatt pedig $MBD_\triangle \sim MPP'_\triangle$. Mivel olyan P pontot vettünk, ami rajta van k-n, tehát $MD = MP$, ezért az $MDC_\triangle$ és $MPP'_\triangle$ háromszögek egybevágóak és ellentétes körüljárásúak. Ez pedig azt jelenti, hogy $CDPP'$ húrtrapéz, így $DPC\sphericalangle \equiv DP'C\sphericalangle \equiv BPA\sphericalangle \pmod{180^\circ}$, a φ forgatva nyújtást is használva. Így a k kör minden P pontja rajta van $S(A,B,C,D)$-n, továbbá a BC egyenes is rajta van, és tudva, hogy a görbe harmadrendű, ezért más pontja nincs is.

A 2. állításra fogunk adni egy 4. bizonyítást is, ehhez azonban meg kell ismernünk a *Cserebere-tételt* (csak a cikkben nevezzük így).

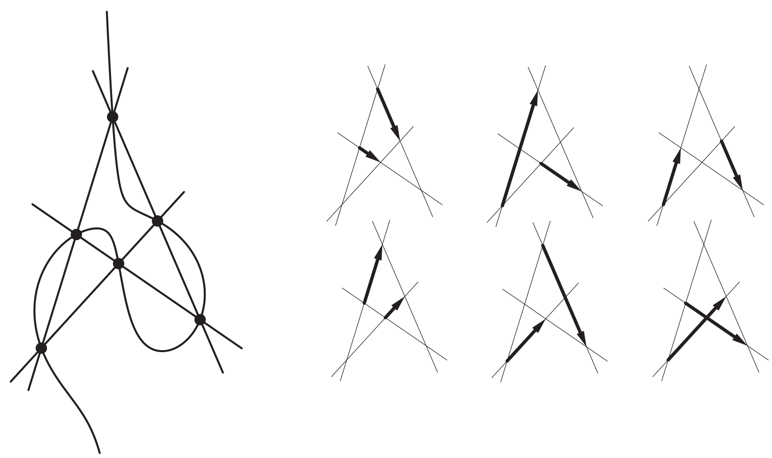
A Cserebere-tétel

Elérkeztünk cikkünk fő attrakciójához. A most következő tétel arról szól, hogy ekvioptikus görbét valójában nem két szakaszhoz rendelünk, hanem négy egyeneshez.

3. állítás (Cserebere-tétel). *Adottak a síkon az a, b, c, d egyenesek, melyek közül semelyik háromnak sincs közös pontja. Kiválasztunk közülük kettőt, pl. a-t és b-t, majd tekintjük azt a két szakaszt, amit a másik két egyenes, c és d metsz ki belőlük. Ekkor ezen két szakasz ekvioptikus görbéje nem függ attól, hogy melyik két egyenest választottuk ki. Tehát például b és c* felcserélhető:

$$S(a\cap c, a\cap d, b\cap c, b\cap d) = S(a\cap b, a\cap d, c\cap b, c\cap d).$$

A *4. ábra* jobb oldali részén a lehetséges $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok vannak berajzolva. A Cserebere-tétel szerint a hat ábra közül bármelyik esetén $S(A,B,C,D)$ a bal oldali harmadrendű görbe lesz.



4. ábra

A bizonyításhoz *kettősviszonyokat* fogunk használni. A projektív geometriáról és kettősviszonyról bővebben az [1], [2], vagy [3] hivatkozásokban lehet olvasni.

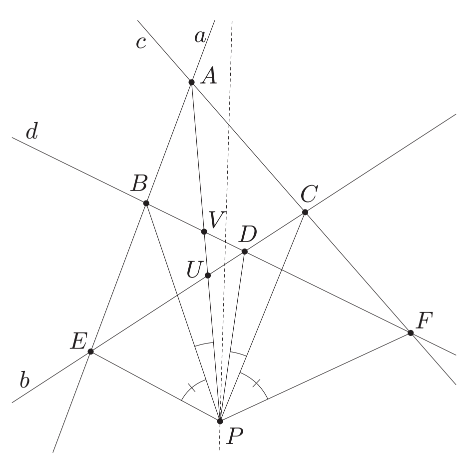
Bizonyítás. Legyen $A = a\cap c$, $B = a\cap d$, $C = b\cap c$, $D = b\cap d$, $E = a\cap b$, $F = c\cap d$, $U = AP\cap b$ és $V = AP\cap d$ (*5. ábra*). Megmutatjuk, hogy ha $APB\sphericalangle \equiv CPD\sphericalangle$, akkor $BPE\sphericalangle \equiv FPC\sphericalangle \pmod{180^\circ}$, minden más egyenesfelcserélés ezzel egyenértékű állításhoz vezet. Az A pontból d-ről b-re való vetítés során a következő kettősviszony megmarad:

$$(BVDF) = (EUDC).$$

Tetszőleges kettősviszony „visszafelé” is leírható, így $(EUDC) = (CDUE)$. A P körüli sugársorokkal megfogalmazva ugyanezt:

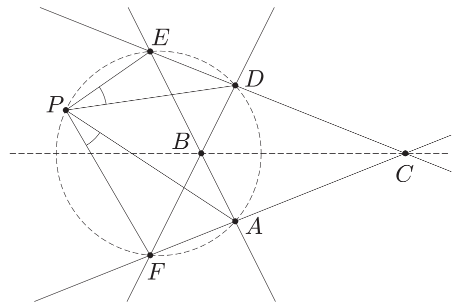
$$(PB, PA, PD, PF) = (PC, PD, PA, PE).$$

Az $APD\sphericalangle$ szögfelezőjére tükrözve PA képe PD, és PB képe PC. Egy kettősviszony értéke és három egyenese alapján a negyedik egyenes egyértelmű, ezért az előző kettősviszonyok csak akkor lehetnek egyenlők, ha PE képe PF. Ekkor $BPE\sphericalangle \equiv FPC\sphericalangle \pmod{180^\circ}$, így a Cserebere-tételt beláttuk.



5. ábra

2. állítás, 4. bizonyítás (*Cserebere-tétel*). Legyenek az $ABDC$ deltoid szemközti oldalainak metszéspontjai $E = AB \cap CD$ és $F = AC \cap BD$ (*6. ábra*). Ekkor a Cserebere-tétel szerint $S(A, B, C, D) = S(A, F, E, D)$. Azonban az $AFED$ húrtrapéz szárainak ekvioptikusát könnyű megtalálni: szimmetria miatt a BC egyenes, a kerületi szögek tétele miatt pedig az $AFED$ kör minden pontja rajta van az ekvioptikus görbén. Tehát deltoid esetén az ekvioptikus valóban egy kör és egy egyenes uniója.



6. ábra

A köri ideális pontok

Komplex projektív síknak nevezzük azon $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, $x, y, z \in \mathbb{C}$ komplex számhármasok halmazát, melyben az (x, y, z) és $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ pontokat azonosnak tekintjük minden $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén. A *valós* projektív síkot úgy lehet elképzelni, hogy a 3-dimenziós euklideszi térben az origón átmenő $\big\{(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \mid \lambda \in \mathbb{R}\big\}$ egyeneseket elmetsszük a $z = 1$ síkkal. Amelyik egyenest tényleg elmetszi, ott kapunk valódi (x, y) pontot, amelyik egyenes pedig párhuzamos vele, abban az esetben beszélünk ideális pontról. A komplex projektív síkon sincs ez másképp: az $(x, y, 0)$ pontokat nevezzük ideális pontoknak.

Mivel $(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, a projektív síkon minden alakzat egyenlete homogén x, y, z-re nézve. Így egy kör egyenlete az $x^2 + y^2 + axz + byz + cz^2 = 0$ alakot ölti. Habár az euklideszi síkon nevetségesnek tűnik a kérdés, mégis megkérdezhetjük: van-e a körnek ideális pontja? A meglepő válasz erre az, hogy a komplex síkon igenis van. Ugyanis $z = 0$ helyettesítéssel $x^2 + y^2 = 0$ adódik, melynek van nemnulla megoldása: az $y = \pm ix$. Ami még meglepőbb, hogy az így kapott

$$(1, i, 0), \qquad (1, -i, 0)$$

pontok minden lehetséges körön rajta vannak. Van tehát két olyan pont valahol a komplex végtelenben, melyek minden körre illeszkednek. Ezért ezeket a pontokat *köri ideális pontoknak* nevezzük.

Ha adott két kör egyenlete: k_1 és k_2, akkor tetszőleges λ, μ esetén $\lambda k_1 + \mu k_2$ is egy kör egyenlete. A $\mathcal{K} = \{\lambda k_1 + \mu k_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ halmazt *körsornak* nevezzük. Körsorok segítségével adhatunk egy újabb módot az ekvioptikus görbe előállítására: adott egy $\mathcal{K}$ körsor és egy φ forgatva nyújtás, és a körsor minden k köréhez vesszük a forgatva nyújtás szerinti képével való metszéspontjait, tehát a

$$\big\{k \cap \varphi(k) \mid k \in \mathcal{K}\big\}$$

halmazt. Ha $\mathcal{K}$ hiperbolikus, azaz fix A, B pontokon átmenő körsor, és $\varphi(AB) = CD$, akkor $\big\{k \cap \varphi(k) \mid k \in \mathcal{K}\big\} = S(A, B, C, D)$, hiszen az AB szakasz α szögű látókörének képe a CD szakasz α szögű látóköre lesz, így metszéspontjuk rajta van az ekvioptikus görbén.

A köri ideális pontok bármely két kör metszetén rajta vannak, ezért benne vannak a $\big\{k \cap \varphi(k) \mid k \in \mathcal{K}\big\}$ halmazban is, és mivel ez a körsoros előállítás ugyanazt a ponthalmazt adja, mint az ekvioptikus görbés előállítás, a köri ideális pontok tetszőleges ekvioptikus görbén rajta vannak. Ugyanerről persze meggyőződhetünk az 1. állításbeli $0 = f_1 g_2 - f_2 g_1$ egyenletbe való helyettesítéssel is.

Annak, hogy az ekvioptikus egy olyan speciális harmadrendű görbe, ami átmegy a köri ideális pontokon, egy következménye a

4. állítás. *Amennyiben két szakasz ekvioptikusa tartalmaz egy valódi (azaz nem komplex és nem ideális) egyenest, akkor a görbe maradék része egy kör.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a harmadrendű görbe

$$(Ax + By + C)(Dx^2 + Exy + Fy^2 + Gx + Hy + I) = 0$$

alakban felbomlik egy elsőfokú és egy másodfokú polinom szorzatára, ahol az együtthatók mind valós számok. Tudjuk, hogy ezen a görbén rajta vannak a köri ideális pontok, így homogenizálva, majd

$$(x, y, z) = (1, i, 0)$$

helyettesítéssel:

$$(A+Bi)(D+Ei-F)=0.$$

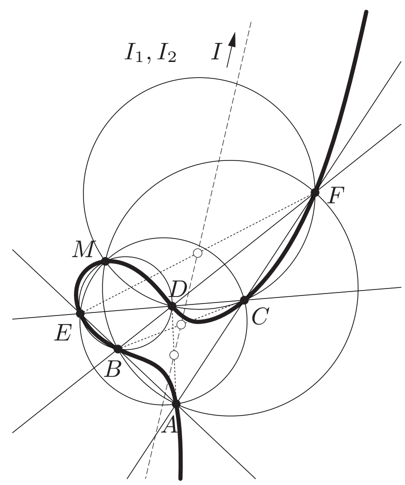
Az első tényező csak akkor lehet nulla, ha $A=B=0$, azonban ez nem ad valódi egyenest. Így a második tényezőnek kell nullának lennie, ahonnan $D=F$ és $E=0$, azaz a másodfokú tényezőben x^2 és y^2 együtthatói megegyeznek, továbbá nincs xy tag. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a harmadrendű görbe egy egyenes és egy (valós vagy képzetes) kör uniója.

Tulajdonképpen azt használtuk, hogy ha egy másodrendű görbe átmegy a köri ideális pontokon, akkor az a görbe egy kör. Megjegyzendő azonban a paralelogramma esete: ha $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, akkor $S(A,B,C,D)$ felbomlik ugyan egy egyenes és egy másodrendű görbe uniójára, de mégsem tartalmaz kört. Ebben az esetben ugyanis az egyenes az ideális egyenes, tehát a köri ideális pontokon az $Ax+By+C=0$ egyenletű alakzat megy át.

A köri ideális pontok segítségével újabb bizonyítást adhatunk a 2. állításra és a Cserebere-tételre:

2. állítás, 5. bizonyítás (*Köri ideális pontok*). A deltoid szimmetriatengelye nyilvánvalóan része az ekvioptikus görbének. A 4. állítás alapján pedig a maradék egy kör, így készen vagyunk. (Az is könnyen megállapítható, hogy melyik kör, ugyanis a 6. ábra jelöléseivel az A, D, E, F pontoknak rajta kell lenniük az ekvioptikuson, tehát a körön is.)

Cserebere-tétel, 2. bizonyítás. Legyen a négy egyenes 6 metszéspontja a szokásos módon A, B, C, D, E, és F (*7. ábra*). Ekkor ez a 6 pont rajta van bármelyik ekvioptikuson, pl. $S(A,B,C,D)$-n és $S(E,B,C,F)$-en. A két köri ideális pont: I_1 és I_2 is mindkettőn rajta van. Miquel tétele szerint tetszőleges négy egyenesre az ABF, ACE, CDF, BDE köröknek van közös pontja. Ha ez a közös pont M, akkor $AMB\sphericalangle \equiv AFB\sphericalangle \equiv CFD\sphericalangle \equiv CMD\sphericalangle \pmod{180^\circ}$, így M rajta van $S(A,B,C,D)$-n, és ugyanígy rajta van $S(E,B,C,F)$-en is.



7. ábra

Keressük meg $S(A,B,C,D)$ valós ideális pontját: ehhez az 1. állításbeli $0=f_1g_2-g_1f_2$ egyenlet homogenizált alakját írjuk fel, majd $z=0$-t helyettesítünk:

$$0=(b_2x+a_1y-a_2x-b_1y)\big(x^2+y^2\big)-(d_2x+c_1y-c_2x-d_1y)\big(x^2+y^2\big),$$
$$0=x(b_2+c_2-a_2-d_2)-y(b_1+c_1-a_1-d_1).$$

Tehát $S(A,B,C,D)$ ideális pontja az $I(b_1+c_1-a_1-d_1, b_2+c_2-a_2-d_2, 0)$ pont. Az AD és BC szakaszok felezőpontjai $U\left(\frac{a_1+d_1}{2}, \frac{a_2+d_2}{2}, 1\right)$ és $V\left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}, 1\right)$, így a koordináták $I=2(V-U)$ összefüggése alapján I, U, V egy egyenesre esik. Ismert, hogy tetszőleges négy egyenesre az AD, BC, EF szakaszok felezőpontjai egy egyenesre esnek, így I rajta van $S(E,B,C,F)$-en is.

Tehát van 10 különböző pontunk (különbözőek, mert az állítás 4 általános helyzetű egyenesről szólt): A, B, C, D, E, F, M, I_1, I_2, és I, melyek rajta vannak $S(A,B,C,D)$-n és $S(E,B,C,F)$-en is. Márpedig két teljesen különböző harmadrendű görbének legfeljebb csak 9 metszéspontja lehet, ha 10 van, az azt jelenti, hogy van közös komponensük. Tegyük fel, hogy a két görbe nem azonos, ekkor mindkettő felbomlik egy egyenesre és egy másodfokú görbére. Ha az egyenes részük különböző, akkor azoknak legfeljebb 1 metszéspontjuk lehet a 10-ből, azonban a maradék 9 pontra nem illeszthető másodrendű görbe, akármelyik 9 pontról is legyen szó. Ha pedig a másodrendű részük különböző, akkor azoknak 4 metszéspontjuk lehet a 10-ből, de a maradék 6 pont nem eshet egy egyenesre. Tehát a két harmadrendű görbe megegyezik, és ezzel beláttuk, hogy $S(A,B,C,D)=S(E,B,C,F)$.

Komplex függvénytan

Eddigi példáinkon valahányszor egy kör és egy egyenes volt az ekvioptikus görbe, az egyenes átment a kör középpontján. Megmutatjuk, hogy ez szükségszerű, sőt, bizonyítást adunk egy sokkal általánosabb állításra, melynek az a következménye, hogy ha az ekvioptikus görbe „egyszeresen önátmetsző”, akkor ebben a pontban a görbe két érintője merőleges egymásra.

Ehhez az ekvioptikus problémát egy újabb szemszögből közelítjük meg: dolgozzunk a komplex számsíkon. Komplex függvénytannal kapcsolatban ajánljuk az olvasónak Szőkefalvi Nagy Béla klasszikus művét: [4].

Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tetszőleges komplex függvény, és legyen

$$R(f) = \big\{z \mid z \in \mathbb{C},\ f(z) \in \mathbb{R}\big\}$$

azon pontok halmaza, ahol f valós értéket vesz fel. Amennyiben az A, B, C, D pontok a komplex számsíkon az a, b, c, d komplex számoknak felelnek meg, úgy tekintsük az

$$f(z) = \frac{\frac{z-a}{z-b}}{\frac{z-c}{z-d}} = \frac{(z-a)(z-d)}{(z-b)(z-c)}$$

függvényt. Legyen a z számnak megfelelő pont P, ekkor $f(z)$ pontosan azon z értékekre lesz valós, melyekre

$$0 \equiv \arg f(z) \equiv \arg\frac{z-a}{z-b} - \arg\frac{z-c}{z-d} \equiv APB\sphericalangle - CPD\sphericalangle \pmod{180^\circ}.$$

Így ebben az esetben az ekvioptikus görbéhez jutottunk, $R(f) = S(A,B,C,D)$.

A görbe z_0 pontját n-szeres *szinguláris pontnak* hívjuk ($n \ge 2$), ha az $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, $f'''(z_0)$, … deriváltak közül az n-edik, $f^{(n)}(z_0)$ az első, amely nem nulla. Ez egy görbén általában úgy jelenik meg szemléletesen, hogy a z_0 pontban a görbe n-szer „átmetszi saját magát”. A legtöbb egyenes általában m különböző pontban metsz egy m-edrendű görbét, az n-szeres szinguláris ponton áthaladó egyenesek azonban csak $(m-n+1)$ pontban.

5. állítás. *Ha egy f (akárhányszor differenciálható) komplex függvény $R(f)$ görbéjén van egy n-szeres szinguláris pont, akkor az ottani n érintő közül a szomszédosak mind ugyanakkora, $\dfrac{180^\circ}{n}$ szöget zárnak be.*

Bizonyítás. Írjuk fel f Taylor-sorát a z_0 pontban:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\cdot(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}\cdot(z-z_0)^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!}\cdot(z-z_0)^3 + \dots\,.$$

Ha az első $(n-1)$ derivált értéke z_0-ban nulla, akkor a függvény

$$e(z) = f(z_0) + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot(z-z_0)^n$$

közelítése alapján kapott $R(e)$ halmaz a z_0-beli érintők egyenletét adja meg. Mivel $f(z_0)$ valós, pontosan akkor kapunk $e(z)$-re is valós értéket, ha

$$0 \equiv \arg\left(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot(z-z_0)^n\right) \equiv \arg\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + n\cdot\arg(z-z_0) \pmod{180^\circ},$$

$$\arg(z-z_0) = -\frac{1}{n}\arg\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + k\cdot\frac{180^\circ}{n}$$

valamely k egész számra. Tehát valóban, a z_0-beli érintők z pontjaira adódó lehetséges $(z-z_0)$ komplex számok szögei közül a szomszédosak különbsége mindig $\dfrac{180^\circ}{n}$.

Ezzel megmutattuk, hogy ha egy ekvioptikus görbe tartalmaz kétszeres szinguláris pontot, akkor a görbe ebben a pontban merőlegesen metszi önmagát.

Feladatok

Végezetül néhány gyakorló feladat:

1. feladat. Adott egy egyenesen négy pont A, B, C, D sorrendben. Mi azon pontok mértani helye, melyekből az AB és CD szakaszok ugyanakkora szögben látszanak?

2. feladat. Az $ABCD$ paralelogramma síkjában fekvő E pontra teljesül, hogy $AEB\sphericalangle \equiv DEC\sphericalangle \pmod{180^\circ}$.
a) Bizonyítsuk be, hogy $BAE\sphericalangle \equiv ECB\sphericalangle \pmod{180^\circ}$.
b) Határozzuk meg az ilyen tulajdonságú E pontok halmazát.

3. feladat. Az ABC háromszög A, B, C csúcsaiból kiinduló belső szögfelezők a szemközti oldalakat az E, F, G pontokban metszik. EF és CG metszéspontja P, EG és BF metszéspontja Q. Bizonyítsuk be, hogy $BAQ\sphericalangle = PAC\sphericalangle$.

4. feladat (*IMO 2014/3. nyomán*). Adott egy $ABCD$ deltoid, melynek AC a szimmetriatengelye, és egy P pont úgy, hogy a B, D pontok az APC szögtartományban vannak, és $APD\sphericalangle = BPC\sphericalangle$. Bizonyítsuk be, hogy a PAB és PCB szögek belső szögfelezői a PB egyenesen metszik egymást.

5. feladat (*Szimmedián-lemma*). Az ABC háromszög köréírt körének B és C-beli érintői E-ben metszik egymást. A háromszög A oldalához tartozó súlyvonalat tükrözzük az A-ból kiinduló belső szögfelezőre (ezt hívjuk szimmediánnak). Bizonyítsuk be, hogy E rajta van az így kapott egyenesen.

6. feladat (*KöMaL, A. 632.*). Legyen $ABCD$ konvex négyszög. Az ABC háromszögben legyen I és J a beírt kör, illetve az A csúccsal szemközti hozzáírt kör középpontja. Az ACD háromszögben legyen K, illetve L a beírt, illetve az A csúccsal szemközti hozzáírt kör középpontja. Mutassuk meg, hogy az IL és JK egyenesek, valamint a $BCD\sphericalangle$ szögfelezője egy ponton mennek át.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Hraskó András tanár úrnak áldozatos munkájáért, észrevételeiért, és mindennemű támogatásáért. Köszönöm matematikatanáraimnak, Dobos Sándor, Kiss Gergely, Gyenes Zoltán, Surányi László, Pósa Lajos tanár uraknak az elmúlt évek során nyújtott kiemelkedő munkájukat. Köszönetet mondok továbbá minden más ismerősömnek, akik biztatásukkal segítették e cikk létrejöttét.

Hivatkozások

[1] Hajós György, *Bevezetés a geometriába*, 44. fejezet (projektív sík, kettősviszony), Tankönyvkiadó, 1971.

[2] Horvay Katalin, Reiman István, *Projektív geometria,* Tankönyvkiadó, 1980.

[3] Dobos Sándor, Hraskó András, *Projektív geometria,* fejezet a Matkönyv, Geometria 11–12. évfolyam kötetben, `http://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol_geometria_iii.pdf`

[4] Szőkefalvi Nagy Béla, *Komplex függvénytan,* Polygon jegyzet, 2009.