I. rész

1. *A Bergengóc ötvösök kétféle fémből készítik ékszereiket.*

A holdfém sűrűsége 5000 kg/m^3, *beszerzési ára* 1000 ft/g (*a* „ft” *a Bergengóc fizetőeszköz, a fémtallér rövidítése*).

A napfém sűrűsége 6000 kg/m^3, *beszerzési ára* 2000 ft/g.

A fémekből kétféle ötvözetet készítenek. Az első ötvözet 1 cm^3*-éhez* 0,6 cm^3 *holdfémet és* 0,4 cm^3 *napfémet használnak fel, míg a második ötvözet* 1 cm^3*-éhez* 0,4 cm^3 *holdfémet és* 0,6 cm^3 *napfémet használnak fel* (*az ötvözés során nem kell anyagveszteséggel számolni*).

a) *Mennyi a kétféle ötvözet grammonkénti anyagköltsége?*

Az elkészült ékszerek árát úgy kalkulálják, hogy az ékszer grammban adott tömegét megszorozzák az adott ötvözet grammonkénti anyagköltségével, és erre tesznek még rá 20%*-ot.*

b) *Mennyi annak az ötvösnek a haszna, aki a* 6,3 grammos *első ötvözetből álló nyakláncot tévedésből úgy adja el, mintha a második ötvözetből készült volna?* (*11 pont*)

Megoldás. *a*) A kétféle fém cm^3-enkénti anyagköltsége:

$$a_1 = 1000\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}}\right) \cdot 5\ \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) = 5000\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{cm}^3}\right) \quad \text{és}$$
$$a_2 = 2000\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}}\right) \cdot 6\ \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) = 12\,000\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{cm}^3}\right).$$

A két ötvözet cm^3-enkénti tömege és anyagköltsége:

$$m_1 = 0{,}6\ (\text{cm}^3) \cdot 5\ \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) + 0{,}4\ (\text{cm}^3) \cdot 6\ \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) = 5{,}4\ \text{g} \quad \text{és}$$
$$k_1 = 0{,}6\ (\text{cm}^3) \cdot 5000\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}}\right) + 0{,}4\ (\text{cm}^3) \cdot 12\,000\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}}\right) = 7800\ \text{ft}, \quad \text{illetve}$$
$$m_2 = 0{,}4\ (\text{cm}^3) \cdot 5\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}}\right) + 0{,}6\ (\text{cm}^3) \cdot 6\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}}\right) = 5{,}6\ \text{g} \quad \text{és}$$
$$k_2 = 0{,}4\ (\text{cm}^3) \cdot 5000\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}}\right) + 0{,}6\ (\text{cm}^3) \cdot 12\,000\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}}\right) = 9200\ \text{ft}.$$

Így a grammonkénti anyagköltségek:

$$k_{1\text{g}} = \frac{7800\ \text{ft}}{5{,}4\ \text{g}} \approx 1444{,}4\ \frac{\text{ft}}{\text{g}}, \quad \text{és} \quad k_{2\text{g}} = \frac{9200\ \text{ft}}{5{,}6\ \text{g}} \approx 1642{,}9\ \frac{\text{ft}}{\text{g}}.$$

b) 6,3 gramm anyagköltsége az első ötvözetből:

$$\frac{7800\ \text{ft}}{5{,}4\ \text{g}} \cdot 6{,}3\ \text{g} = 9100\ \text{ft}.$$

A nyaklánc eladási ára:

$$\frac{9200\ \text{ft}}{5{,}6\ \text{g}} \cdot 6{,}3\ \text{g} \cdot 1{,}2 = 12\,420\ \text{ft}.$$

Így az ötvös haszna: $12\,420 - 9100 = 3320$ ft.

2. *Hány olyan* (*egybevágóságtól eltekintve*) *különböző téglalap van, melynek oldalai* (cm*-ben*) *egész számok, míg területe és kerülete* (cm^2*-ben és* cm*-ben*) 100*-nál nem nagyobb négyzetszám?* (*12 pont*)

Megoldás. A téglalap oldalai: $a \le b$, így $a \le 10$. A területre és a kerületre: $a \cdot b = n^2 \le 100$ és $2(a+b) = k^2 \le 100$, így $nk \le 10$.

I. Ha $a = b$, akkor a téglalap négyzet, így a terület mindig négyzetszám, a kerület pedig $4a = k^2$ miatt pontosan akkor négyzetszám, ha $a = b$ négyzetszám. Vagyis az 1×1-es, 4×4-es, 9×9-es téglalap megfelelő.

II. Ha $a < b$, akkor $a \le 9$ is teljesül. Az esetet két részre osztjuk:

II.1. Ha $a = 1$, akkor $b = n^2$, és a kerületből $2 + 2n^2 = k^2$. Mivel ekkor k páros négyzetszám, így 4-gyel is osztható, de ez csak akkor lehet, ha n páratlan. A lehetséges eseteket ($n = 3, 5, 7, 9$) végigpróbálva csak $n = 7$ ad jó megoldást. Ekkor $a = 1$, $b = 7^2 = 49$, vagyis az 1×49-es téglalap is jó.

II.2. Ha $1 < a < b$, akkor a az n^2-nek egy n-nél kisebb pozitív osztója és $b = \dfrac{n^2}{a}$. Ez az a érték az $n = 2, 3, 5, 7$ prímek esetén csak $a = 1$ lehet, ezt pedig már megvizsgáltuk. Nézzük végig a többi esetet is:

Ha $n=4$: $a=2$ esetén $2(a+b)=2(2+8)=20\neq k^2$.
Ha $n=6$: $a=2$ esetén $2(a+b)=2(2+18)=40\neq k^2$, míg
$a=3$ esetén $2(a+b)=2(3+12)=30\neq k^2$, míg
$a=4$ esetén $2(a+b)=2(4+9)=26\neq k^2$.
Ha $n=8$: $a=2$ esetén $2(a+b)=2(2+32)=68\neq k^2$, míg
$a=4$ esetén $2(a+b)=2(4+16)=40\neq k^2$.
Ha $n=9$: $a=3$ esetén $2(a+b)=2(3+27)=60\neq k^2$.
Ha $n=10$: $a=2$ esetén $2(a+b)=2(2+50)=104>100$, míg
$a=4$ esetén $2(a+b)=2(4+25)=58\neq k^2$, míg
$a=5$ esetén $2(a+b)=2(5+20)=50\neq k^2$.
Vagyis összesen négy ilyen téglalap van, ezek méretei: 1×1, 4×4, 9×9, és 1×49.

3. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

$$a)\ \log_4(x+1)+\log_4(x+2)=\log_2\sqrt{6},$$
$$b)\ \frac{2x^2-3x+1}{x^2-3x+2}-\frac{2x^2-2x-12}{x^2-7x+12}=1.$$
(14 pont)

Megoldás. A logaritmus definíciója miatt az $x+1>0$ feltételnek teljesülnie kell, amiből $x>-1$. Használva a logaritmus azonosságait, a jobb oldalt is 4-es alapra alakítva:

$$\log_4\big((x+1)(x+2)\big)=\log_4 6.$$

Mivel a logaritmus-függvény szigorúan monoton függvény, innen $(x+1)(x+2)=6$, és így $x^2+3x-4=0$, amiből $x_1=1$ és $x_2=-4$ adódik.

Ezek közül csak az első megoldás megfelelő, vagyis az egyenlet megoldása: $x=1$.

b) A törtek számlálóit és nevezőit szorzattá alakítva:

$$\frac{(2x-1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}-\frac{(2x+4)(x-3)}{(x-3)(x-4)}=1.$$

Innen $x\notin\{1;2;3;4\}$.

Egyszerűsítve a törteket, majd a maradék nevezőkkel szorozva:

$$(2x-1)(x-4)-(2x+4)(x-2)=(x-2)(x-4).$$

Elvégezve a zárójelfelbontásokat:

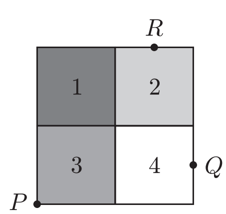
$$2x^2-9x+4-2x^2+8=x^2-6x+8,$$

innen $x^2+3x-4=0$, amiből $x_1=1$ és $x_2=-4$ adódik.

Ezek közül csak a második megoldás megfelelő, vagyis az egyenlet megoldása: $x=-4$.

4. *Peti tíz egyforma* 2 *egység élű építőkockából tornyot épít. A torony alapja* 4 cm $\times$ 4 cm-*es négyzet, de az egyes részeinek más-más a magassága.*

(*A felülnézeti* ábra *azt mutatja, hogy egy-egy rész hány darab* $2\times2\times2$ *cm-es kockából áll.*)



Az ábrán látható P, Q, R pontok az egyes részek legmagasabban lévő építőkockáinak a felső lapján vannak. P az egyik négyzetlap csúcsa, míg Q és R a felső négyzetlapok megfelelő éleinek felezőpontjai.

a) *Mekkora a* (*térbeli*) *PQR háromszög P-nél lévő szöge?*

b) *Peti* 4 *piros,* 3 *fehér,* 2 *zöld és* 1 *kék kockából építi meg a fenti tornyot.*

Hányféle különböző felülnézeti ábra áll így elő? (*A nem identikus egybevágósági transzformációval egymásba vihető ábrákat különbözőnek tekintjük.*) *(14 pont)*

Megoldás. *a*) Az a, b, c élhosszú téglatest testátlóinak hossza $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

A P, Q, és R pontok között futó térbeli szakaszok tekinthetők a megfelelő téglatestek testátlóinak: PQ-nál a téglatest élei 2, 4 és 1; QR-nél 3, 4 és 1; RP-nél pedig 3, 4 és 2.

Ezek alapján a P, Q, R pontok között lévő távolságok:

$$r=d(PQ)=\sqrt{21}\,,\quad p=d(QR)=\sqrt{26}\,,\quad q=d(RP)=\sqrt{29}\,.$$

Koszinusz-tétellel kiszámoljuk a P-nél lévő (p-vel szemközti) γ szöget:

$$p^2=q^2+r^2-2qr\cos\gamma,\quad \text{így}\quad \cos\gamma=\frac{q^2+r^2-p^2}{2qr}=\frac{29+21-26}{2\sqrt{29}\,\sqrt{21}}=\frac{12}{\sqrt{609}},$$

amiből $\gamma\approx 60{,}9^\circ$.

b) A piros, fehér, zöld, kék színeket P, F, Z, K betűvel jelölve a feladat ekvivalens azzal, hogy 4 db P, 3 db F, 2 db Z és 1 db K betűből hányféle 4 betűs „szó” képezhető. Vizsgáljuk meg a lehetséges eseteket aszerint, hogy a felülnézeti rajzon a színek hogy látszódnak.

I. Valamely színből 4 látható. Ekkor a színek száma rendre 4, 0, 0, 0. Mivel csak a P-ből van 4 darab, ezért ez 1 eset.

II. Valamely színből 3 látható. A színek száma ekkor 3, 1, 0, 0. Az első szín kettőből (P, F), a második szín háromból választható, vagyis hatféleképpen választhatunk színt. Ha a színeket már kiválasztottuk, a négybetűs szó $\frac{4!}{3!}=4$-féleképpen képezhető. Így itt $6\cdot 4=24$ eset van.

III. Valamely színből 2 látható. Ekkor a színek száma 2, 2, 0, 0 vagy 2, 1, 1, 0. Az első esetben a két látható szín háromból (P, F, Z) választható $\binom{3}{2}=3$-féleképpen. Ha a színeket már kiválasztottuk, a négybetűs szó $\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$-féleképpen képezhető. Így itt $3\cdot 6=18$ eset van. A második esetben az első szín háromból (P, F, Z), a kimaradó (negyedik) szín szintén háromból választható, vagyis a színeket kilencféleképpen választhatjuk. Ha a színeket már kiválasztottuk, a négybetűs szó $\frac{4!}{2!}=12$-féleképpen képezhető, így itt $9\cdot 12=108$ eset van.

IV. Végül, ha minden színből 1 látható, akkor nyilván $4!=24$ eset van.

Vagyis összesen $1+24+18+108+24=175$-féle felülnézeti ábra van.

II. rész

5. *a*) *Igazoljuk, hogy a következő két sorozat konvergens, és közös a határértékük:*

$$a_n=\frac{6n^2-n-1}{2n^2+n+1},\qquad b_n=\sqrt{n^2+6n+12}-n.$$

b) *Igazoljuk, hogy a fenti a_n sorozat minden tagja kisebb a fenti b_n sorozat valamennyi tagjánál.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A számláló és a nevező minden tagját osztva n^2-tel:

$$a_n=\frac{6n^2-n-1}{2n^2+n+1}=\frac{6-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

Mind a számlálóban, mind a nevezőben az első tagok kivételével nullsorozatról van szó, így $a_n\to\frac{6}{2}=3$.

A másik sorozatot a konjugáltjával bővítve:

$$b_n=\frac{\left(\sqrt{n^2+6n+12}-n\right)\left(\sqrt{n^2+6n+12}+n\right)}{\sqrt{n^2+6n+12}+n}.$$

Innen:

$$b_n=\frac{6n+12}{\sqrt{n^2+6n+12}+n}=\frac{6+\frac{12}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{12}{n^2}}+1}\ \to\ \frac{6}{1+1}=3.$$

b) Az első sorozatnál mind a számláló, mind a nevező mindig pozitív, és mivel

$$6n^2-n-1<6n^2+3n+3=3\left(2n^2+n+1\right),$$

azért $a_n<3$ minden n-re.

A második sorozatnál

$$b_n=\sqrt{n^2+6n+12}-n>\sqrt{n^2+6n+9}-n=(n+3)-n=3.$$

Mivel a közös határértéknél az a_n sorozat minden tagja kisebb, míg a b_n sorozat minden tagja nagyobb, igazoltuk a *b*) pontot is.

6. *A térbeli derékszögű-koordináta-rendszerben felveszünk 3 piros pontot: $A(1;0;0)$, $B(2;0;0)$, és $C(3;0;0)$, valamint 3 fehér pontot: $D(0;1;0)$, $E(0;2;0)$, és $F(0;3;0)$, valamint 3 zöld pontot: $G(0;0;1)$, $H(0;0;2)$, és $I(0;0;3)$.*

a) Véletlenszerűen kiválasztunk a kilenc pont közül hármat úgy, hogy a kiválasztott pontok egy háromszög csúcsai legyenek. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az így kapott háromszögnek vannak azonos színű csúcsai?

b) A kilenc pont közül válasszunk ki úgy néhányat, hogy az általuk meghatározott test térfogata a lehető legnagyobb legyen. Mely csúcsokat válasszuk ki, és mekkora lesz ekkor a kérdéses térfogat? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Akkor van (nem elfajuló) háromszög, ha a kiválasztott három pont nincs egy egyenesen. Ez csak három esetben (ABC, DEF, valamint GHI választása esetén) nem teljesül. Mivel 9 pont közül hármat $\binom{9}{3} = 84$-féleképp választhatunk ki, azért összesen $84 - 3 = 81$ olyan háromszög van, melyek csúcsai a 9 csúcs közül kerülnek ki.

Ezek közül rosszak azok, melyeknek három különböző színű csúcsa van. Ezek száma $3^3 = 27$. Így összesen $81 - 27 = 54$ olyan háromszög van, melynek vannak azonos színű csúcsai, így a kérdéses valószínűség: $\frac{54}{81} = \frac{2}{3}$.

b) Mivel az $ACDFGI$ test az összes többi testet tartalmazza, a kérdéses test ez a csonka gúla. A térfogata legegyszerűbben úgy számolható ki, hogy az $OCFI$ gúla térfogatából kivonjuk az $OADG$ gúla térfogatát (az O pont az origó). A térfogat így:

$$V = \frac{3^3}{6} - \frac{1^3}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}.$$

Vagyis a térfogat: $\frac{13}{3}$.

7. *Tekintsük a derékszögű koordináta-rendszerben a következő két kört:*

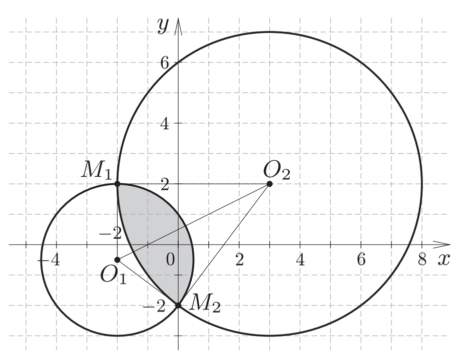
$$k_1\colon x^2 + 4x + y^2 + y = 2 \quad \textit{és} \quad k_2\colon x^2 - 6x + y^2 - 4y = 12.$$

Mekkora annak a síkrésznek a területe, amelyet mind a két kör lefed? (*16 pont*)

Megoldás. A körök középpontjainak és sugarainak kiszámításához átalakítjuk az egyenleteket. Jelölje a k_1 és a k_2 kör sugarát, illetve középpontját rendre r_1 és r_2, illetve O_1 és O_2. A k_1 kör esetén

$$(x+2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

azaz $O_1\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$, $r_1 = \frac{5}{2}$.



A k_2 kör esetén $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$, azaz $O_2(3;2)$, $r_2 = 5$.

Az első kör egyenletéből kivonva a második körét:

$$10x + 5y = -10, \quad \text{amiből} \quad y = -2x - 2.$$

Ezt behelyettesítve mondjuk az első egyenletbe: $x^2 + 4x + (-2x-2)(-2x-1) = 2$, amiből $x^2 + 4x + 4x^2 + 6x + 2 = 2$, vagyis $5x^2 + 10x = 0$, tehát $x_1 = -2$ és $x_2 = 0$ adódik.

Innen (behelyettesítéssel) a két kör metszéspontjai: $M_1(-2;2)$, és $M_2(0;-2)$. Mivel

$$d(O_1O_2) = \sqrt{5^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{125}{4}}, \quad d(O_1M_2) = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2},$$

és

$$d(O_2M_2) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = \sqrt{25} = \sqrt{\frac{100}{4}},$$

emiatt (a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint) az $O_1M_2O_2\sphericalangle$ derékszög. Innen az $M_2O_1M_1$ szöget α-val, az $M_1O_2M_2$ szöget β-val jelölve:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{\frac{25}{4}}}{\sqrt{\frac{125}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \text{amiből}\quad \alpha\approx 126{,}87°,$$

és innen $\beta\approx 53{,}13°$.

A kérdéses metszet területének kiszámításához az O_1 középpontú M_2M_1 ívhez tartozó körcikk területét és az O_2 középpontú M_1M_2 ívhez tartozó körcikk területét összeadjuk, és ebből kivonjuk az $O_1M_1O_2M_2$ derékszögű deltoid területét, melynek oldalai 5 és 2,5 egység hosszúak.

Vagyis a metszet területe:

$$T\approx\frac{2{,}5^2\cdot\pi\cdot 126{,}87°}{360°}+\frac{5^2\cdot\pi\cdot 53{,}13°}{360°}-5\cdot\frac{5}{2}\approx 6{,}01.$$

A két kör által közösen lefedett síkrész területe: $T\approx 6{,}01$.

8. *A p paraméter mely értékeire lesz a*

$$px^2-(p-1)x-\frac{3}{4}p+\frac{1}{2}=0$$

a) egyenletnek egy megoldása;
b) egyenletnek két megoldása, az egyik pozitív, a másik negatív;
c) egyenletnek gyöke a -3;
d) egyenlet gyökeinek az aránya $1:2$? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Ha $p=0$ (vagyis az egyenlet elsőfokú), akkor $x=-\frac{1}{2}$ (ekkor egy megoldás van.)

Különben az egyenlet másodfokú, és egy megoldása pontosan akkor van, ha az egyenlet diszkriminánsa 0:

$$\begin{aligned}D&=(p-1)^2-4\cdot p\cdot\left(-\frac{3}{4}p+\frac{1}{2}\right)=\\&=p^2-2p+1+3p^2-2p=4p^2-4p+1=(2p-1)^2=0.\end{aligned}$$

Innen $p=\frac{1}{2}$. Vagyis $p=0$, és $p=\frac{1}{2}$ esetén van az egyenletnek egy megoldása.

A *b*)–*c*)–*d*) pontok nem teljesülhetnek $p=0$ esetén. Így a továbbiakban $p\neq 0$. Mivel D „szép", adjuk meg a p segítségével az egyenlet két megoldását:

$$x_{1,2}=\frac{p-1\pm|2p-1|}{2p},\quad \text{innen}\quad x_1=\frac{3p-2}{2p},\quad x_2=\frac{-p}{2p}=-\frac{1}{2}.$$

Innen egyszerűen adódnak a válaszok:

b) Mivel a negatív gyök megvan, így $\frac{3p-2}{2p}>0$, és ebből $p>\frac{2}{3}$, vagy $p<0$.

c) $-3=\frac{3p-2}{2p}$, innen $p=\frac{2}{9}$.

d) Itt két eset van aszerint, hogy melyik gyök a nagyobb. Vagy $-1=\frac{3p-2}{2p}$, és így $p=\frac{2}{5}$, vagy $-\frac{1}{4}=\frac{3p-2}{2p}$, és így $p=\frac{4}{7}$.

9. *Kati „peches"-számai a 3-as, és a 7-es.*

Egy nap 1-től kezdve elkezdte felírni a pozitív egészeket, de azokat a számokat, amikben volt hármas, vagy hetes jegy kihagyta.

a) Milyen számjegyekből áll a Kati által felírt 2015*-dik szám?*

b) Hanyadik számként írta fel Kati a 2015*-ös számot?* (*16 pont*)

Megoldás. Használjunk 8-as számrendszert. A Kati által felírt számok tekinthetők 8-as számrendszerbeli számoknak, csak jól el kell készítenünk a két számrendszer (a „rendes 8-as számrendszer", és Katié) közötti „kódtáblát". Ez a tábla a következő:

8-as számrendszerben	0	1	2	3	4	5	6	7
Katinál	0	1	2	4	5	6	8	9

Vagyis pl. a 8-as számrendszerbeli 53 megegyezik a Kati-féle 64 alakú számmal. Ezt a továbbiakban $53_8 = 64_K$-ként fogjuk jelölni.

a) A 8-as számrendszerben a 2015-dik számot pl. ismételt 8-cal való maradékos osztásokkal meghatározhatjuk:

$$2015 = 251 \cdot 8 + 7, \quad 251 = 31 \cdot 8 + 3, \quad 31 = 3 \cdot 8 + 7, \quad 3 = 0 \cdot 8 + 3.$$

Vagyis $2015_{10} = 3737_8$. Mivel $3737_8 = 4949_K$, ezért a Kati listáján szereplő 2015-dik szám a 4949.

b) Mivel $2015_K = 2014_8 = 2 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 4 = 1036_{10}$, ezért Kati a 2015-t a saját listáján az 1036-dik számként írta fel.