Jelöljük az AB, BC, CD, DA, AC szakaszok hosszát rendre a-val, b-vel, c-vel, d-vel, e-vel. Az $ABCD$ négyszög akkor és csakis akkor érintőnégyszög, ha $a+c=b+d$, vagyis az $a-b$ és $d-c$ különbségek egyenlőek. Jelöljük ezek közös értékét k-val; mivel a, b adott, k-t is ismerjük:

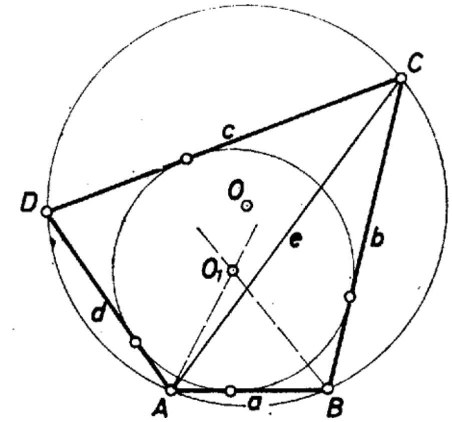
$$a-b=d-c=k. \tag{1}$$

Ez tehát annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy $ABCD$ érintőnégyszög legyen.

Az $ABCD$ négyszög akkor és csakis akkor húrnégyszög, ha az ABC, ADC háromszögek B-nél, D-nél levő szögei egymást 180°-ra egészítik ki. Ez viszont pontosan akkor teljesül, ha a két szög koszinuszának az összege 0:

$$\frac{a^2+b^2-e^2}{2ab}+\frac{c^2+d^2-e^2}{2cd}=0. \tag{2}$$

Ha tehát találunk olyan c, d mennyiségeket, amelyekre teljesül (1) és (2), azokkal megfelelő négyszög szerkeszthető, és a keresett négyszög oldalaira ezek az egyenletek biztosan teljesülnek.



Az $x_1=c$ és $x_2=-d$ ismeretlenek összege (1) szerint $-k$, és az $s=x_1x_2$ szorzatukra (2) szerint

$$(k^2-2s-e^2)ab=s(a^2+b^2-e^2)$$

teljesül, vagyis

$$s=ab\,\frac{(a-b)^2-e^2}{(a+b)^2-e^2}. \tag{3}$$

Mivel a, b, e egy háromszög oldalai, így $|a-b|<e<a+b$, tehát (3) jobb oldalán a tört számlálója negatív, nevezője pozitív. Emiatt az

$$x^2+kx+s=0$$

egyenletnek mindig két valós gyöke van, és közülük az egyik pozitív, a másik negatív. Esetünkben a pozitív gyök csak $x_1=c$, a negatív gyök csak $x_2=-d$ lehet, tehát

$$c=-\frac{k}{2}+\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2-s},\qquad d=+\frac{k}{2}+\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2-s},$$

ahol k értékét (1), s értékét (3) határozza meg. Mivel ezekre a mennyiségekre teljesül (1) és (2), a feladatnak mindig pontosan egy megoldása van.

A mondott számok mellett $k=-20$,

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2-s=100-20\cdot 40\cdot\frac{20^2-49^2}{60^2-49^2}=1435{,}1125,$$
$$c=10+37{,}88=47{,}88,\quad d=-10+37{,}88=27{,}88.$$