1. feladat: Elektromos vezetőképesség két dimenzióban

Elméleti háttér

A számítógépcsipek és a napelemek készítéséhez pontosan kell ismerni a felhasznált anyagok fajlagos ellenállását. A méréshez véges méretű mintákat, véges kontaktellenállású érintkezőket és speciális geometriát használnak – ezeket a hatásokat figyelembe kell venni a mérések kiértékelésekor. Ráadásul egy vékonyréteg egész másképp viselkedik, mint egy anyagtömb.

A vékonyrétegek jellemzésére az úgynevezett négyzetes ellenállást használják, ami a fajlagos ellenállás osztva a nagyon vékony réteg vastagságával.

A nagy pontosságú ellenállásmérésekhez széles körben alkalmazzák az ún. négypontos módszert. Ez azt jelenti, hogy – a hagyományos Ohm-törvényen alapuló ellenállásméréssel szemben – nem ugyanazokat a kontaktusokat használják az áram be- és kivezetésére és az ellenálláson eső feszültség mérésére.

A mérés vázlatos leírása

Az első négy részfeladatban egy vékony grafitréteggel bevont papírlapon végezhettek méréseket a versenyzők. A négypontos mérőelrendezés négy, egy egyenesbe eső, egymástól ugyanakkora távolságra lévő tűkontaktusból állt. A két szélső érintkezőn keresztül egy tápegységből ismert nagyságú áramot kellett vezetni, a két középső érintkezőn pedig a feszültséget mérni.

Az első részfeladat annak igazolása, hogy egy nagyméretű, grafittal bevont papírlapon mérve is teljesül az Ohm-törvény. Különböző áramerősségek mellett mért feszültségből és az $I-U$ grafikonra illesztett egyenes meredekségéből meg lehetett határozni az $R=U/I$ ellenállást.

A második részfeladat a minta négyzetes ellenállásásának kiszámítása volt. Egy nagyon nagy felület közepén a fent ismertetett négytűs módszerrel mért ellenállásból a $\varrho_\square$ négyzetes ellenállás a következő összefüggéssel számítható ki:

$$\varrho_\square = \frac{\pi}{\ln 2} R.$$

A következő két részfeladatban a minta méretének hatását tanulmányozhatták a diákok. Ha a minta mérete csökken, akkor a mért R ellenállás növekszik (hiszen az áram kevesebb lehetséges útvonalon folyhat), ugyanakkor a minta négyzetes ellenállása értelemszerűen nem változik.

Ha a továbbra is nagyon hosszú minta szélessége w, a négytűs elrendezésben a tűk távolsága pedig s, akkor a négyzetes ellenállást megadó összefüggés így módosul:

$$\varrho_\square = \frac{\pi}{\ln 2} \frac{R(w/s)}{f(w/s)},$$

ahol $R(w/s)$ a w szélességű mintán mért ellenállás, $f(w/s)$ pedig egy korrekciós tényező, amit

$$f(w/s) = 1 + a\left(\frac{w}{s}\right)^b$$

alakban kereshetünk. Az a és b paraméterek értékét a különböző szélességű mintákon mért ellenállások alapján függvényillesztéssel kellett meghatározni.

Az ötödik (utolsó) részfeladatban egy nagyon vékony krómréteggel bevont, kör alakú szilícium mintán végezhettek méréseket a versenyzők. Először az előző részfeladatokból ismert négytűs elrendezéssel mérték a minta R ellenállását, majd ebből meghatározhatták a $\varrho_\square$ négyzetes ellenállást. A D átmérőjű kör alakú minta hatását úgy kellett figyelembe venni, mintha a minta egy $w = D$ szélességű csík lenne. Az ehhez tartozó $f(w/s)$ korrekciós tényezőhöz az előző feladatban meghatározott a és b állandókat használhatták.

Annak érdekében, hogy a négyzetes ellenállást geometriai korrekciók nélkül pontosan mérhesse, *L. J. van der Pauw*, a Philips cég mérnöke, kifejlesztett egy egyszerű mérési módszert. A négy érintkezőt most nem egy egyenes vonal mentén, hanem a tetszőleges alakú minta peremére erősíti (1-től 4-ig számozva). Az áram két szomszédos érintkezőn át folyik, pl. az 1-es és 2-es érintkezőn, a feszültséget pedig a 3-as és 4-es érintkező között méri. Az ezekből az adatokból kiszámított ellenállás legyen $R_{12,34}$.

Szimmetriaokokból $R_{12,34} = R_{34,12}$ és $R_{14,23} = R_{23,14}$. Van der Pauw megmutatta, hogy egy tetszőleges, de egyszeresen összefüggő (lyukakat nem tartalmazó) minta és pontszerű kontaktusok esetében érvényes a következő összefüggés:

$$e^{\pi R_{12,34}/\varrho_\square} + e^{\pi R_{14,23}/\varrho_\square} = 1.$$

Ez alapján egy másik négytűs elrendezéssel (egy kör alakú minta széléhez nagyon közel, négyzet alakban elhelyezett kontaktusokkal) is meg kellett mérni az ellenállást, majd a van der Pauw-összefüggés alapján meghatározható négyzetes ellenállást össze lehetett hasonlítani az előző módszerrel kapottal.

2. feladat: Ugráló gyöngyök – fázisátalakulások és instabilitások modellezése

Elméleti háttér

A mindennapi életből jól ismert, hogy bizonyos anyagok (pl. a víz) többféle halmazállapotban (szilárd, folyékony és gáz) is előfordulhatnak. Ezek az állapotok fázisátalakulások során alakulhatnak át egymásba, miközben az anyag molekuláinak *együttes* viselkedése változik meg. Egy ilyen fázisátalakuláshoz mindig tartozik egy *átalakulási hőmérséklet*, amelyen a halmazállapot megváltozik; a víz esetén ez a fagyáspont és a forráspont. Fázisátalakulások ennél azonban sokkal szélesebb körben, más rendszereknél is előfordulnak, mint pl. mágneseknél és szupravezetőknél, amelyekben az átalakulási hőmérséklet alatt az anyag makroszkopikus állapota paramágnesesből ferromágnesessé, illetve normál vezetőből szupravezetővé változik.

Mindezen fázisátalakulások leírhatók egy közös formalizmussal, ha a rendszer rendezettségét egy alkalmasan választott mennyiséggel, a *rendparaméterrel* írjuk le. Mágneseknél például a rendparaméter az atomi mágneses momentumok rendeződéséből adódó makroszkopikus mágnesezettségnek felel meg. Az úgynevezett folytonos fázisátalakulásokban a rendparaméter értéke az átalakulási hőmérséklet fölött mindig zérus, alatta pedig folytonosan növekszik. A ferromágneses állapotban az elemi mágneses momentumok irányítottsága makroszkopikus mágnesezettséghez vezet, míg a paramágneses állapotban a véletlenszerű elrendeződés zérus makroszkopikus mágnesezettséget eredményez. Folytonos fázisátalakulások esetén az átalakulási hőmérsékletet *kritikus hőmérsékletnek* nevezik.

Folytonos fázisátalakulások esetén általánosan igaz, hogy az átalakulás közelében a rendparaméter hatványfüggést követ; mágneses fázisátalakulásban például az M mágnesezettség a $T_{\mathrm{krit.}}$ kritikus hőmérséklet közelében a következőképp írható:

$$M \begin{cases} \sim (T_{\mathrm{krit.}} - T)^b, & \text{ha } T < T_{\mathrm{krit.}} \\ = 0, & \text{ha } T > T_{\mathrm{krit.}}. \end{cases}$$

Még ennél is meglepőbb, hogy ez a viselkedés *univerzális*: a hatványfüggvény kitevője ugyanakkora sok, különböző típusú fázisátalakulás esetén.

A mérés vázlatos leírása

A mérés során a folytonos fázisátlakulások néhány jellegzetességét vizsgálták a versenyzők, mint pl. hogy egy instabilitás hogyan vezethet a részecskék kollektív viselkedéséhez és így a fázisátalakuláshoz, valamint hogy ez a makroszkopikus változás hogyan függ a részecskék gerjesztettségétől. A leggyakoribb fázisátalakulásokban ezt a gerjesztettséget a hőmérséklet jellemzi. A mérésben a gerjesztettség egy hangszóró által gyorsított gyöngyök mozgási energiájának felelt meg. A vizsgált fázisátalakulásban a makroszkopikus változást a gyöngyöknek a kis fallal kettéosztott henger egyik felében való összegyűlése jelentette. A hangszóróra adott feszültség (ami arányos a hangszóró rezgési amplitúdójával) növelésekor a kezdetben csak a henger egyik felében összegyűlt gyöngyök egyszercsak két egyenlő részre válva kerültek a rekeszekbe, ami a kritikus hőmérséklet fölé melegítésnek felelt meg. A feladat a fázisátalakulás vizsgált modelljében a kritikus kitevő meghatározása volt. A méréshez egy előre elkészített, hangszóróra szerelt henger, egy változtatható amplitúdójú jelgenerátor és sok apró gyöngy állt rendelkezésre.

Az első részben a kritikus gerjesztési amplitúdó meghatározása volt a cél, amihez a henger két rekeszében levő gyöngyök számát (N_1 és $N_2 \geq N_1$) mérték a hangszórón eső U feszültség függvényében. Ahogy a feszültség növekedett, egyre több gyöngy került át a másik térrészbe, egy bizonyos feszültség felett a két térrészben nagyjából azonos mennyiségű gyöngyöt lehetett megszámolni. A két számot a feszültég függvényében ábrázolva, a grafikonon levő változó szakaszokra egyenesek illesztésével, majd azok metszéspontjának megkeresésével meg lehetett adni az $U_{\mathrm{krit.}}$ kritikus feszültséget.

A második részben a mérés kalibrációja volt a feladat, azaz annak a meghatározása, hogy a hangszórón eső feszültség mekkora A amplitúdójú, függőleges rezgést jelentett. A mérési elrendezés összeállítása a versenyzők feladata volt. Legtöbben a méréshez biztosított ceruzát erősítették a hangszóróra rögzített hengerre, és megmérték, hogy a ceruza mekkora függőleges vonalat rajzol a henger mellé helyezett milliméterpapíron. Akadt, aki ennél bonyolultabb, de szellemes elrendezést adott meg, amit a versenybizottság különdíjjal jutalmazott. Egy egyenes illesztésével a feszültség és az amplitúdó közötti kapcsolatot, abból pedig az előző részben kapott $U_{\mathrm{krit.}}$ kritikus feszültséghez tartozó $A_{\mathrm{krit.}}$ kritikus amplitúdót kaphatták meg a versenyzők.

A harmadik részben a fenti b kritikus kitevőt kellett meghatározni. A rendszerben a hőmérséklet a gerjesztés által bevitt kinetikus energiának felelt meg. Ez az energia arányos a hangszóró sebességének négyzetével, azaz a hangszóró A amplitúdójának négyzetével. A feladatban megadták, hogy a rendparaméter az $|N_1 - N_2|/(N_1 + N_2)$ mennyiség, ami 0 a kritikus amplitúdó felett, és 1 alacsony gerjesztések esetén. Logaritmikus beosztású skálán ábrázolva a rendparamétert az $|A^2_{\mathrm{krit.}} - A^2|$ mennyiség függvényében, egyenes illesztésével a versenyzők meg tudták határozni a kitevőt, ami $0{,}6 \pm 0{,}2$-nek adódott.