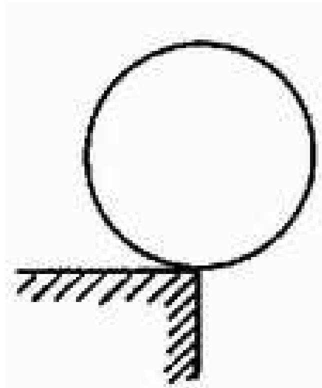
Egy golyót az asztal szélén, az ábrán látható helyzetben elengedünk. A golyó melyik helyzetében válik el az asztal szélétől, ha a

a) *súrlódás elhanyagolható,*

b) *nagyon nagy?*

⋆

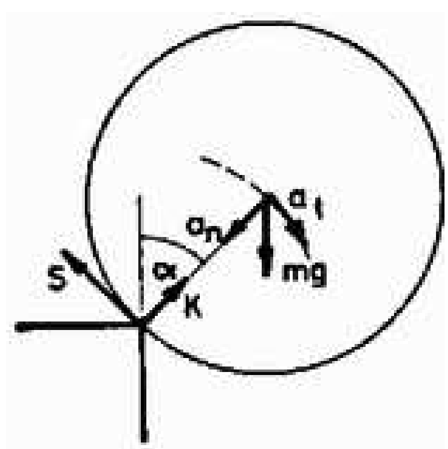


Vizsgáljuk meg a megoldás feltevéseinek realitását, azaz az a) esetbeli $\mu = 0$ és a b) esetbeli „igen nagy” értéket! A műszaki megoldás realitásához tartozik, hogy megvizsgáljuk a táblázatokban található legkisebb és legnagyobb súrlódási együtthatóval való számolás esetén a megoldásmenet korrektségét, és összehasonlítjuk a realitásnak engedményeket tevő egyszerűsítő feltevésekkel kapható megoldásmenet korrektségével. Erre igen érdekes példa ez a feladat.

Az *Omacht–Sárközi: Műszaki Táblázatok* c. kötetben található legkisebb súrlódási együttható $\mu = 0{,}028$ (acél jégen), a legnagyobb pedig $\mu = 0{,}76$ (kő betonon). Úgy tűnik, hogy az első adat valóban közel áll a feltételezett 0 értékhez, és *elvileg* a másodiknál is vehetünk sokkal nagyobbat ($\mu > 1$-nek sincs elvi akadálya), de kérdés, meddig térhetünk el a reális értékektől, ha nem akarjuk „fogaskerékre” és „fogaslécre” átfogalmazni az ilyen típusú feladatokat? Erre a kérdésre csak úgy válaszolhatunk megnyugtatóan, hogy felveszünk egy tetszőleges μ értéket, és megvizsgáljuk, hogy ennek zérus felé való csökkentése ill. „végtelen” felé való növelése befolyásolja-e a megoldás menetének elvi tisztaságát.

A feladat közölt megoldásában a $\mu = 0$ feltevést elég jól tűrik a megoldásban alkalmazott fizikai törvények, azonban látni fogjuk, hogy a „μ legyen igen nagy érték” csak akkor elegendően nagy, ha pont „végtelen”! Ez pedig már túl van a realitások nagyvonalúan kezelt határain is, mert a „végtelen” és az „igen nagy” igen távol van egymástól! A közölt megoldás feltétele, vagyis a golyó elválásig való *csúszásmentessége* csak $\mu = \infty$ esetben valósul meg, ugyanis véges súrlódási együttható esetén a golyó az $53{,}96^\circ$ elérése *előtt feltétlenül megcsúszik*, mert a 0-hoz tartó kényszererő képtelen biztosítani a csúszásmentességhez szükséges szöggyorsulást okozó tapadási súrlódási erőt. Így a megoldásban alkalmazott mechanikai energia megmaradására felírt egyenlet a golyó asztaltól való elválása előtt *érvényét veszti*, mert a csúszási súrlódás közben az energia egy része disszipálódik.

Ezen bevezető után gondolhatnánk, hogy a közölt megoldás teljesen hibás. Látni fogjuk azonban, hogy ez nincs így, de néhány gondolatot érdemes kifejteni a megoldás kapcsán. Egyszerre két dolgot vizsgálunk meg: egyrészt honnan kezdve elvi hibás a megoldás, ha nem utalunk az alkalmazott elhanyagolásra, másrészt hogy miért jó a közölt megoldás, ha utalunk rá (és megbecsüljük az elhanyagolás mértékét).



1. ábra

E célból határozzuk meg különböző értékű súrlódási együtthatók esetén a golyó megcsúszásához tartozó szögelfordulást! Egyenleteink a tiszta gördülésig érvényesek, a tapadási erőre vonatkozó egyenlőtlenség pedig éppen a megcsúszás pillanatáig:

(1) $$mg\sin\alpha - S = ma_t$$

(mozgásegyenlet a tömegközéppont tangenciális mozgására),

(2) $$mg\cos\alpha - K = ma_n$$

(mozgásegyenlet a tömegközéppont normálirányú mozgására),

(3) $$SR = \frac{2}{5}mR^2\beta$$

(forgatónyomaték-tétel),

(4) $$S\leq\mu K$$

(a tapadási súrlódási erő értéke megcsúszás előtti pillanatig),

(5) $$mgR(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\omega^2$$

(mechanikai energia megmaradásának tétele),

(6) $$a_t = R\beta$$

(a csúszásmentes gördülés szükséges feltétele),

(7) $$v = R\omega$$

(a csúszásmentes gördülés elégséges feltétele).

Az egyenletrendszer megoldása cos α-ra:

$$\cos\alpha = \frac{340\mu^2 \pm \sqrt{340^2\mu^4 - 4\cdot(100\mu^2-4)(289\mu^2+4)}}{2(289\mu^2+4)}.$$

Készítsünk táblázatot arra vonatkozóan, hogy különböző súrlódási együtthatók esetén a golyó mekkora szögelfordulás után csúszik meg!

μ	0,01	0,028	0,1	0,2	0,5	0,76	1	2	10	∞
α	2,03°	5,56°	17,97°	29,07°	41,8°	45,66°	47,54°	50,7°	53,29°	53,96°

Az utolsó értékpár egzakt megoldással úgy kapható meg, hogy az egyenletrendszert μ-re oldjuk meg, és meghatározzuk α értékét, amelyhez $\mu=\infty$ tartozik:

$$\mu = \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{289\cos\alpha^2 - 340\cos\alpha + 100}}.$$

Ebből a kifejezésből látszik, hogy a súrlódási együttható akkor válik végtelenné, ha a nevező zérussá válik, vagyis a

$$289\cos\alpha^2 - 340\cos\alpha + 100 = 0$$

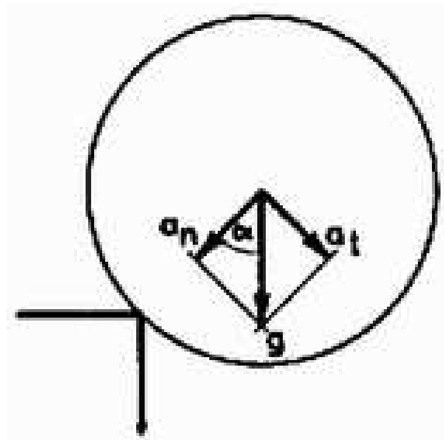
egyenlet megoldásaként kapott szög esetén. Innen

$$\cos\alpha = \frac{340+\sqrt{340^2 - 400\cdot 289}}{2\cdot 289} = \frac{340}{278} = \frac{10}{17},$$

ahonnan $\alpha = 53,96°$, ami éppen a golyó elfordulási szögének a megoldásban közölt értéke, vagyis a *golyó csak akkor nem csúszik meg az asztaltól való elválásig, ha a tapadási súrlódás együtthatója végtelen*! Ilyet pedig a természet nem produkál, mesterségesen valamiféle „bütyökkel” elő lehet ugyan állítani ennek megfelelő hatást, azonban ekkor már nem golyó a golyó.

Mint látható, a lecsúszó golyó a feladat *a)* kérdésében is kap egy kis forgási energiát, azonban ez valóban elhanyagolható, a *b)* kérdésre adott meggondolásban szereplő feltevés ($\mu=\infty$) azonban túl nagy elrugaszkodás a realitásoktól, így a megoldásban elvi problémák lépnek fel.

Most megmutatjuk, hogy ha megbecsüljük a megoldásban figyelmen kívül hagyott energiadisszipációt, ami az „igen nagy” de véges (pl. 0,76 értékű) súrlódási együttható miatt lép fel, és figyelembe vesszük a megoldáskor, igen kis numerikus eltérést kapunk a szélsőséges feltétellel kapotthoz képest.



2. ábra

Amikor a golyó elhagyja az asztal sarkát, tömegközéppontjának gyorsulása $a = g$. Ennek pályaérintő- és normálirányú komponensei:

$$a_n = g\cos\alpha, \quad \text{illetve} \quad a_t = g\sin\alpha$$

nagyságúak. Innen az asztal sarkától a golyó középpontjáig húzott pályasugár elfordulása szögének tangense az elválás pillanatában:

$$\text{tg } \alpha = \frac{a_t}{a_n} = \frac{Rg\sin\alpha}{v^2},$$

ahonnan

$$\cos\alpha = \frac{v^2}{Rg}. \tag{8}$$

A golyó elválásának szögét ismerjük, ha a golyó tömegközéppontjának pillanatnyi sebességét ismerjük az elváláskor. Ennek meghatározásába szól bele a megcsúszás. A mechanikai energia megmaradásának tétele nem alkalmazható, a munka-tétel viszont érvényes, és fel is írhatjuk, ha valamilyen módon meg tudjuk határozni a csúszási súrlódási erő munkáját.

Írjuk fel a munkatételt a *megcsúszás pillanatától az asztal elhagyásáig*! Jelölje a megcsúszás kezdetén meglevő szögelfordulást α_0, az elhagyás pillanatabeli (teljes) szögelfordulást α, a golyó e két helyzete közötti inerciarendszerbeli szögelfordulását φ!

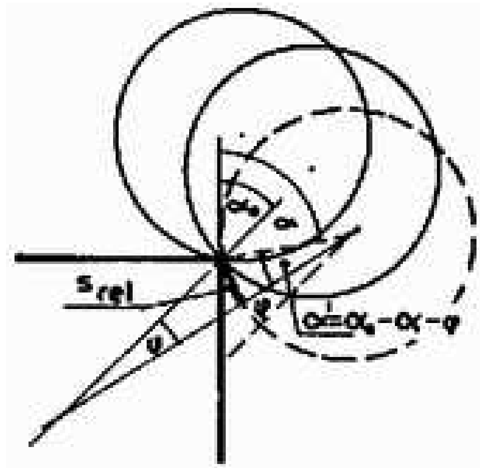
$$mgR\left(\cos\alpha_0 - \cos\alpha\right) - \int\limits_0^{\alpha-\alpha_0-\varphi} SR d\alpha' = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2(\omega^2 - \omega_0^2), \tag{9}$$

ahol $\alpha' = \alpha - \alpha_0 - \varphi$, a relatív szögelfordulás, amivel a súrlódó felületek egymáson megtett útját mérjük a megcsúszástól az elválásig.

Ijesztőnek látszik a változó súrlódási erő munkájának integrállal való kiszámítása, valamint az, hogy semmiféle közvetlen kényszer-kapcsolatunk nincs a golyó tömegközéppontjának sebessége és *forgásának* (nem pályamozgásának!) szögsebessége között. Az előbbi gondot úgy kerülhetjük meg, hogy becslésünk során a kényszererő, ill. a vele arányos csúszási súrlódási erő szögelfordulástól való függését a várhatóan kicsiny szögtartományban lineáris függvénnyel közelítjük. A második problémát egyszerű meggondolással küszöbölhetjük ki. Ez a következő:

A csúszási súrlódási erő munkája esetünkben – mint ahogy (9)-ből látható – egy negatív és egy pozitív tag összege. A negatív tag abszolút értéke a nagyobb. Ez okozza az energiadisszipációt. A pozitív tag a golyó tömegközéppont körüli forgásának szögsebességét (energiáját) növeli, ez a tény azonban *nem befolyásolja* a tömegközéppont pályamozgásának sebességét, tehát az asztaltól való elválás körülményeit sem. A negatív tag játszik bele a golyó transzlációs sebességének alakításába.

A csúszva-gördüléskor végzett súrlódási munka számítását egy egyszerű példával világítjuk meg.



3. ábra

Gurítsunk el egy golyót érdes síkon úgy, hogy kezdetben csússzon! A súrlódási erőnek a golyón végzett munkája a súrlódási erő és a súrlódó felületek *relatív* elmozdulásának negatív előjellel vett szorzata:

$$W = -Ss_{rel} = -S(s - R\varphi),$$

ahol s a tömegközéppont útja a nyugvó talajon, φ a golyó teljes szögelfordulása (az inerciarendszerhez képest). A munkatétel szerint:

$$W = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2(\omega^2 - \omega_0^2).$$

Mivel

$$SR\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2(\omega^2 - \omega_0^2),$$

a munkatételre felírt egyenlet mindkét oldaláról elhagyható!

A fentiek szerint a $W = -S(s - R\varphi)$ munkából a $-S \cdot s$ a sebességet csökkenti, az $SR\varphi$ a szögsebességet növeli. (Ez utóbbi nem számít az elválás szempontjából!)

Alkalmazzuk a mi esetünkre, figyelembe véve, hogy a lineáris közelítés miatt a súrlódási erő átlagát a számtani középpel számíthatjuk, ami a teljes megszűnésig a maximális értékének a fele! A maximális érték pedig a megcsúszás kezdetén mérhető érték:

$$mgR(\cos\alpha_0 - \cos\,\alpha) - \frac{S_0}{2}R(\alpha - \alpha_0) + \frac{S_0}{2}R\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2(\omega^2 - \omega_0^2).$$

(Figyelembe vettük, hogy a munkatételben korábban felírt $\alpha^{'} = \alpha - \alpha_0 - \varphi$, és hogy

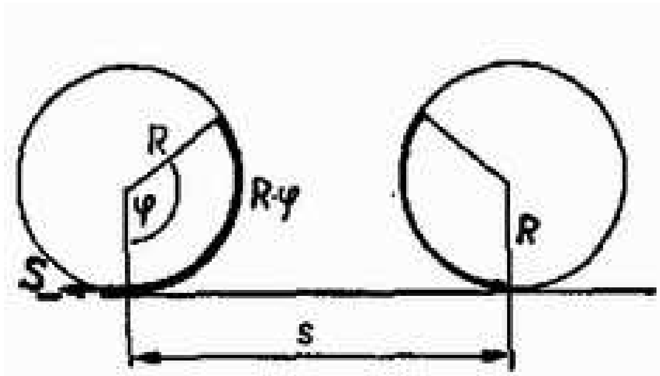
$$\frac{S_0}{2}R\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2(\omega^2 - \omega_0^2),$$

amit mindkét oldalról elhagytunk.) Innen v^2-et kifejezve:

$$v^2 = 2gR(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) - \frac{S_0}{m}R(\alpha - \alpha_0) + v_0^2.$$

Ezzel az elválás szögének koszinuszára kapott (8) összefüggés így írható:

$$\cos\alpha = 2(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) - \frac{S_0}{mg}(\alpha - \alpha_0) + \frac{v_0^2}{Rg}.$$



4. ábra

Figyelembe véve, hogy a maximális súrlódási erő a tapadás utolsó pillanatában érvényes

$$S_0 = \frac{2}{7} mg \sin\alpha_0$$

érték, és ugyanekkor az (5) egyenletből

$$v_0^2 = \frac{10}{7} Rg(1 - \cos\alpha_0),$$

a következő egyismeretlenes (transzcendens) egyenletet kapjuk:

$$3\cos\alpha = 2\cos\alpha_0 - \frac{2}{7}\sin\alpha_0(\alpha - \alpha_0) + \frac{10}{7}(1 - \cos\alpha_0),$$

(ahol α radiánban értendő). Válasszuk a súrlódási együtthatót $\mu = 0{,}76$-nak, akkor a konstansok értékei: $\alpha_0 = 45{,}66^\circ$, $\sin\alpha_0 = 0,7152$, $\cos\alpha_0 = 0,6989$, amivel egyenletünk így alakul:

$$3\cos\alpha = 2\cos 45{,}66^\circ - \frac{2}{7}\sin 45{,}66^\circ(\alpha - 45{,}66^\circ) + \frac{10}{7} - \frac{10}{7}\cos 45{,}66^\circ.$$

Ha α értékét fokban kívánjuk beírni, ez radiánra átszámítva $\pi/180$-nal szorzandó, ezzel (a műveletek elvégzése után) a

$$\cos\alpha = 0{,}66359893 - 1{,}18882682 \cdot 10^{-3}\alpha \text{ (fokban)}$$

egyenlethez jutunk. (A számértékek 9 jegy pontosságát csak az elviek miatt tartottuk meg átmenetileg.) Rövid próbálkozás után (csak a $45{,}66^\circ < \alpha < 54^\circ$ szögekkel kell próbálkozni): $\alpha = 53{,}0959^\circ \approx 53,1^\circ$ eredményt kapjuk.

Ebben az eredményben a lineáris közelítés bizonytalansága benne van, ezért az $53,1^\circ$-ot fogadjuk el. Örömmel látjuk, hogy az eredeti megoldásban közölt $53{,}96^\circ$-os értéktől csak kicsit térünk el, vagyis a megcsúszás figyelmen kívül hagyása durván

$$\frac{53{,}96 - 53,1}{53{,}1} \approx 1{,}6\%$$

hibát okozott.