I. rész

1. *Számítsuk ki az A kifejezés pontos értékét:*

$$A=\left(\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}}\right)^{-2}\cdot\left(14-\sqrt{12}-\sqrt{96}\right)^2\cdot\left(\frac{2^2}{2015}\right)^{-1}.$$

(11 pont)

Megoldás.

$$\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2,$$

$$\frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}=\frac{\left(5-2\sqrt{6}\right)^2}{25-24}=\left(5-2\sqrt{6}\right)^2.$$

$$A=\left(2-\sqrt{3}+5-2\sqrt{6}\right)^{-2}\cdot 2^2\left(7-\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right)^2\cdot\frac{2015}{2^2}=$$
$$=\left(7-\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right)^{-2}\cdot\left(7-\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right)^2\cdot 2015=2015.$$

2. *Egy sakkversenyen mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig 25 játszmát fejeztek be, és mindenkinek még hátravan 4 játszmája. Hány sakkozó vesz részt a versenyen?* *(12 pont)*

Megoldás. Legyen a részvevők száma n, így mindenki $n-1$ mérkőzést játszik. Ha minden sakkozónak még 4 mérkőzése van hátra, akkor eddig mindenki $n-1-4=n-5$ mérkőzést játszott. Ez összesen $\frac{n(n-5)}{2}$ mérkőzés. Tehát az $\frac{n(n-5)}{2}=25$ egyenletet kell megoldanunk. Az $n^2-5n-50=0$ másodfokú egyenlet pozitív megoldása $n=10$. Tehát 10 sakkozó vesz részt a versenyen.

3. *Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:*

$$\frac{625^x-81^x}{375^x+135^x}=\frac{2}{\sqrt{15}}.$$

(14 pont)

Megoldás. A hatványalapokat bontsuk prímtényezők szorzatára, ezután az egyenlet:

$$\frac{(5^x)^4-(3^x)^4}{(5^x)^3\cdot 3^x+(3^x)^3\cdot 5^x}=\frac{2}{\sqrt{15}}.$$

Vezessük be az $a=5^x$ és $b=3^x$ új változókat, ekkor

$$\frac{a^4-b^4}{a^3\cdot b+b^3\cdot a}=\frac{2}{\sqrt{15}}.$$

Szorzattá alakítva a számlálót és a nevezőt, majd egyszerűsítve $(a^2+b^2\neq 0)$:

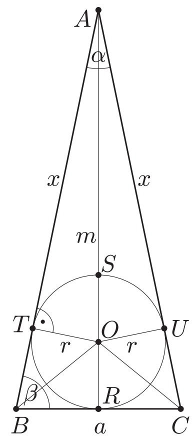
$$\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)}{ab\left(a^2+b^2\right)}=\frac{2}{\sqrt{15}},$$
$$\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{2}{\sqrt{15}},$$
$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{2}{\sqrt{15}}.$$

Az $y=\frac{a}{b}=\left(\frac{5}{3}\right)^x$ új változót bevezetve: $y-\frac{1}{y}=\frac{2}{\sqrt{15}}$, $\sqrt{15}\,y$-nal $(y\neq 0)$ beszorozva a $\sqrt{15}y^2-2y-\sqrt{15}=0$ másodfokú egyenletet kapjuk.

Az egyenlet megoldásai: $y_1=-\frac{3}{\sqrt{15}}$ és $y_2=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Az első, negatív megoldás nem lehet pozitív szám hatványa, így a második megoldásból kapjuk az eredeti egyenlet egyetlen megoldását: $\left(\frac{5}{3}\right)^x=\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$. Mivel az $x\to\left(\frac{5}{3}\right)^x$ függvény szigorúan monoton függvény, ezért ebből $x=\frac{1}{2}$ következik.

4. *Egy egyenlő szárú háromszög súlypontja illeszkedik a háromszög beírható körére. Mekkorák a háromszög szögei? Bizonyítsuk be, hogy a beírt kör szárakon lévő két érintési pontja és a szárak közös végpontja három egyenlő részre osztja a háromszög kerületét.* (*14 pont*)

Megoldás. Az S pont illeszkedik az alaphoz tartozó magasságra és a beírt körre. Mivel a súlypont harmadolja a súlyvonalat, így a magasság harmada egyenlő a kör átmérőjével: $\frac{m}{3} = 2r$ vagyis $m = 6r$.



Az AOT derékszögű háromszögben $OT = r$ és $OA = m - r = 5r$, vagyis $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{5r} = 0{,}2$, amiből $\alpha \approx 23{,}7°$, és innen $\beta \approx 78{,}46°$.

A szimmetria és az érintőszakaszok egyenlősége miatt $AT = AU = x$, $BT = BR = CR = CU = \frac{a}{2}$.

A feladat második részének bizonyításához írjuk fel a háromszög területét kétféleképpen:

$$T_{ABC\triangle} = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{a \cdot 6r}{2} = 3ar,$$

másrészt

$$T_{ABC\triangle} = 2T_{ATO\triangle} + 4T_{BRO\triangle} = 2 \cdot \frac{x \cdot r}{2} + 4 \cdot \frac{a \cdot r}{4} = xr + ar.$$

A kettőt egyenlővé téve kapjuk, hogy $3ar = xr + ar$, vagyis $2ar = xr$, amiből következik, hogy $2a = x$.

A háromszög kerülete:

$$K_{ABC\triangle} = 2x + 4 \cdot \frac{a}{2} = 2x + 2a = 3x.$$

Mivel $AT = AU = x$, az A, T és U pontok valóban harmadolják a háromszög kerületét.

II. rész

5. *Vizsgáljuk meg az alábbi egyenlet megoldhatóságát az m paraméter függvényében:*

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2\sin^2 x + 2\cos^2 x + 3m^2 = 4m(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x).$$

(*16 pont*)

Megoldás. Ismeretes, hogy $a \geq 0$ esetén $a + \frac{1}{a} \geq 2$, hasonlóan $a \leq 0$ esetén $a + \frac{1}{a} \leq -2$.

Vezessük be az $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ új változót, ekkor $y \leq -2$ vagy $2 \leq y$, valamint

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2\sin^2 x + 2\cos^2 x = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2 = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 = y^2.$$

Az egyenletünk az új változóval: $y^2 + 3m^2 = 4my$, rendezve $y^2 - 4my + 3m^2 = 0$. Az egyenlet diszkriminánsa: $D = 16m^2 - 12m^2 = 4m^2$, így $D \geq 0$. A megoldóképletet alkalmazva a két megoldás:

$$y_{1,2} = \frac{4m \pm \sqrt{16m^2 - 12m^2}}{2} = 2m \pm |m|,$$

ahonnan $y_1 = m$ és $y_2 = 3m$.

Nincs megoldása az egyenletnek, ha $m = 0$, mert $y = 0$ lenne.

Ha $0 < m$ és $3m < 2$, vagyis $m < \frac{2}{3}$, akkor nem lesz megoldás.

Hasonlóan, $m<0$ és $-2<3m$, azaz $-\frac{2}{3}<m$ esetén szintén nem lesz megoldás.

Tehát nincs megoldása az egyenletnek, ha $-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$.

Egy megoldást kapunk y-ra, ha $0<m<2$ és $2\le 3m$, vagyis $\frac{2}{3}\le m<2$, vagy ha $-2<m<0$ és $3m\le -2$, vagyis $-2<m\le -\frac{2}{3}$.

Ilyenkor az eredeti egyenlet megoldásait a

$$\operatorname{tg} x+\frac{1}{\operatorname{tg} x}=3m, \quad \text{azaz a} \quad \operatorname{tg}^2 x-3m\cdot \operatorname{tg} x+1=0$$

egyenlet megoldásával kapjuk. Az egyenlet diszkriminánsa $D=9m^2-4\ge 0$, amiből $|m|\ge\frac{2}{3}$, ami az m-re adott fenti feltételek esetén teljesül.

Ha $m\le -2$ vagy $2\le m$, akkor mindkét y-ra kapott értéket visszahelyettesíthetjük, és a megoldásokat a $\operatorname{tg}^2 x-3m\cdot\operatorname{tg} x+1=0$ és a $\operatorname{tg}^2 x-m\cdot\operatorname{tg} x+1=0$ egyenletek gyökei adják. Az egyenletek diszkriminánsát megvizsgálva, az $|m|\ge\frac{2}{3}$ és $|m|\ge 2$ feltételeket kapjuk a megoldhatóságra, melyek az m-re adott fenti feltételek esetén teljesülnek.

6. *A teafűből a forró vízben a kellemes ízeket adó anyagok gyorsabban kioldódnak, mint a káros csersavak. Előfordul, hogy a teafüvet véletlenül hosszabb ideig hagyjuk a vízben, mint szükséges lenne, ilyenkor a csersavaktól keserű lesz a tea. Az időt percekben mérve, a* $t\in[0,30]$ *intervallumon közelítsük a percenként kioldódó csersav mennyiségét a* $v(t)=-t^3+25t^2+150t$ *függvénnyel. Hány százalékkal több csersav oldódik ki a teafűből, ha a szükséges* 5 perc *helyett* 10 *vagy* 15 percig *benne felejtjük a filtert a vízben?* (*16 pont*)

Megoldás. Számoljuk ki az 5 perc alatt kioldódó A mennyiséget:

$$A=\int_0^5 -t^3+25t^2+150t\,dt=\left[-\frac{t^4}{4}+25\cdot\frac{t^3}{3}+150\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^5\approx$$
$$\approx -156{,}25+1041{,}7+1875=2760{,}45.$$

A 10 perc alatt kioldódó B mennyiség:

$$B=\int_0^{10} -t^3+25t^2+150t\,dt=\left[-\frac{t^4}{4}+25\cdot\frac{t^3}{3}+150\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^{10}\approx$$
$$\approx -2500+8333{,}3+7500=13\,333{,}3.$$

A 15 perc alatt kioldódó C mennyiség:

$$C=\int_0^{15} -t^3+25t^2+150t\,dt=\left[-\frac{t^4}{4}+25\cdot\frac{t^3}{3}+150\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^{15}\approx$$
$$\approx -12\,656{,}25+28\,125+16\,875=32\,343{,}75.$$

Ha 10 percre felejtjük a vízben a teafüvet, akkor

$$\frac{B-A}{A}=\frac{13\,333{,}3-2760{,}45}{2760{,}45}\approx 3{,}83=383\%\text{-kal}$$

több, ha pedig 15 percig, akkor

$$\frac{C-A}{A}=\frac{32\,343{,}75-2760{,}45}{2760{,}45}\approx 10{,}72=1072\%\text{-kal}$$

több csersav oldódik ki, mintha betartottuk volna az 5 percet.

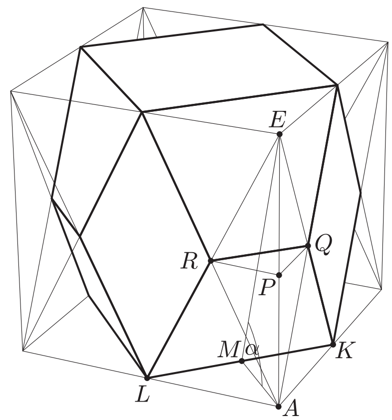
7. *Egyik lapjára állított* 18 cm *élhosszúságú kockából kiindulva bonbonos dobozt tervezünk. Az alap és fedőlap oldalfelező pontjait összekötjük a szemközti lap közelebbi csúcsaival, az* ábrának *megfelelően. A keletkező háromszög alapú gúlákat elhagyjuk a kockából. Az így létrejött testet, a bonbonos dobozt, papírból fogjuk elkészíteni,* 30% *ragasztási felület, illetve hulladék ráhagyásával. Mennyi papírra lesz szükségünk? Mekkora lesz a doboz térfogata? Mekkora szöget zárnak be a trapéz alakú lapok egymással?* (*16 pont*)

Megoldás. Vizsgáljuk meg az egyik elhagyott háromszög alapú gúlát, $AKLE$-t, ennek térfogata: $V=\frac{9\cdot 9\cdot 18}{2\cdot 3}=243\ \mathrm{cm}^3$. A $PQRE$ gúla hozzá hasonló, a hasonlóság aránya $\lambda=\frac{1}{2}$, a térfogatuk aránya $\lambda^3=\frac{1}{8}$, így az $AKLPQR$ háromszög alapú csonka gúla térfogata

$$V_1=\frac{7}{8}V=\frac{1701}{8}.$$

Nyolc darab ilyen csonkagúlát vágunk ki a kockából, így a doboz térfogata

$$V_D = 18^3 - 8 \cdot \frac{1701}{8} = 4131 \text{ cm}^3.$$



A doboz felszíne két négyzetből, nyolc egyenlő szárú trapézból és nyolc egyenlő szárú háromszögből áll.

A négyzet területe: $T_N = \left(9\sqrt{2}\right)^2 = 162 \text{ cm}^2$.

A trapéz alapjai: $9\sqrt{2}$ és $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$, szárai

$$s = \sqrt{9^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{9\sqrt{5}}{2},$$

magassága:

$$m = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{27\sqrt{2}}{4}.$$

Így a trapéz területe:

$$T_T = \frac{9\sqrt{2} + \frac{9\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot \frac{27\sqrt{2}}{4} = \frac{729}{8} \text{ cm}^2.$$

A háromszög területe:

$$T_H = \frac{9 \cdot 9}{2} = \frac{81}{2} \text{ cm}^2.$$

A doboz felszíne:

$$A = 2T_N + 8T_T + 8T_H = 2 \cdot 162 + 8 \cdot \frac{729}{8} + 8 \cdot \frac{81}{2} = 324 + 729 + 324 = 1377 \text{ cm}^2.$$

Tehát a ráhagyással együtt $1377 \text{ cm}^2 \cdot 1{,}3 = 1790{,}1 \text{ cm}^2$ papír szükséges a doboz elkészítéséhez.

A KL szakasz felezőpontja legyen az M pont, $AM = \dfrac{AK}{\sqrt{2}} = \dfrac{9}{\sqrt{2}}$. Az $\alpha = AME\sphericalangle$ a trapéz alakú oldal alaplappal bezárt szöge:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AE}{AM} = \frac{18\sqrt{2}}{9} = 2\sqrt{2}, \quad \text{amiből} \quad \alpha \approx 70{,}53°.$$

A két trapéz alakú oldallap szöge ennek a szögnek a duplája: $2\alpha \approx 141{,}06°$.

8. *Mekkora szögben látszik az alábbi körök közös húrja az origóból?*

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 8x - 8y + 22 = 0.$$

(*16 pont*)

Megoldás. Teljes négyzetté alakítás után:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25 \quad \text{és} \quad (x-4)^2 + (y-4)^2 = 10.$$

Ebből leolvasható a két kör középpontja és sugara: $K_1(-2;1)$, $r_1 = 5$, $K_2(4;4)$, $r_2 = \sqrt{10}$.

A két kör egyenletét kivonva egymásból a $12x + 6y = 42$ egyenletet kapjuk, amiből $y = -2x + 7$ következik. Ez a húr egyenesének egyenlete. Ezt visszahelyettesítve az első kör egyenletébe az $(x+2)^2 + (-2x+6)^2 = 25$ másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek a megoldásai $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Ezeket visszahelyettesítve az egyenes egyenletébe kapjuk, hogy $y_1 = 1$, $y_2 = 5$. Tehát a közös húr végpontjainak koordinátái $A(1;5)$ és $B(3;1)$.

Az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok szögét kell megadnunk:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos\gamma = \sqrt{26} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos\gamma.$$

Másrészt a koordinátákból: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3 + 5 = 8$. Ezekből $\cos\gamma = \dfrac{8}{\sqrt{260}} \approx 0{,}4961$, amiből $\gamma \approx 60{,}26°$.

9. *A zöldséges* 1 *hetes,* 2 *hetes és* 3 *hetes narancsokat árul. Annak a valószínűsége, hogy egy* 1 *hetes narancs romlott,* 0,01. *Ez a valószínűség a tapasztalatok szerint hetente megduplázódik. A zöldségesnél jelenleg* 25 kg 1 *hetes,* 17 kg 2 *hetes és* 6 kg 3 *hetes narancs van. A narancsok tömege egyformának tekinthető,* 5 db 1 kg. *Egyik reggel a pakoláskor összekeveredtek a narancsok.*

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott narancs romlott?

b) Véletlenszerűen kiválasztottunk egy narancsot, ami jó. Mekkora a valószínűsége, hogy 3 *hetes?*

c) Vettünk 40 dkg *narancsot. Mekkora a valószínűsége, hogy mind jó? És annak, hogy a fele romlott?* (*16 pont*)

Megoldás. Jelölje A, B, illetve C rendre azt az eseményt, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott narancs 1 hetes, 2 hetes, illetve 3 hetes; R pedig azt az eseményt, hogy egy narancs romlott. Az A, B és C események teljes eseményrendszert alkotnak.

Adott, hogy $P(R|A) = 0{,}01$, $P(R|B) = 0{,}02$, $P(R|C) = 0{,}04$. Mivel 5 darab narancs 1 kg, ezért 1 hetes narancsból 125, 2 hetesből 85, míg 3 hetesből 30 darab van, ez összesen 240 db narancs. Így a következőket tudjuk még:

$$P(A) = \frac{125}{240}, \quad P(B) = \frac{85}{240} \quad \text{és} \quad P(C) = \frac{30}{240}.$$

a) A teljes valószínűség tételét használva:

$$\begin{aligned} P(R) &= P(A)P(R|A) + P(B)(P(R|B) + P(C)P(R|C) = \\ &= \frac{125}{240} \cdot 0{,}01 + \frac{85}{240} \cdot 0{,}02 + \frac{30}{240} \cdot 0{,}04 \approx 0{,}0173. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(C|\overline{R}) &= \frac{P(C\overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{P(C)P(\overline{R}|C)}{P(\overline{R})} = \frac{P(C)\big(1 - P(R|C)\big)}{1 - P(R)} = \\ &= \frac{\frac{30}{240} \cdot (1 - 0{,}04)}{1 - 0{,}0173} \approx 0{,}1221. \end{aligned}$$

c) Felhasználjuk, hogy $P(\overline{R}|A) = 1 - P(R|A) = 0{,}99$, $P(\overline{R}|B) = 1 - P(R|B) = 0{,}98$ és $P(\overline{R}|C) = 1 - P(R|C) = 0{,}96$.

A két narancs kiválasztására a következő lehetőségek vannak: mindkettő 1 hetes; mindkettő 2 hetes; mindkettő 3 hetes; egyik 1, másik 2 hetes; egyik 1, másik 3 hetes; egyik 2, másik 3 hetes.

$$\begin{aligned} &P(\text{mindkét narancs jó}) = \\ &= \frac{\binom{125}{2}}{\binom{240}{2}} \cdot P(\overline{R} \mid A)^2 + \frac{\binom{85}{2}}{\binom{240}{2}} \cdot P(\overline{R} \mid B)^2 + \frac{\binom{30}{2}}{\binom{240}{2}} \cdot P(\overline{R} \mid C)^2 + \\ &+ \frac{125 \cdot 85}{\binom{240}{2}} \cdot P(\overline{R} \mid A) \cdot P(\overline{R} \mid B) + \frac{125 \cdot 30}{\binom{240}{2}} \cdot P(\overline{R} \mid A) \cdot P(\overline{R} \mid C) + \\ &+ \frac{85 \cdot 30}{\binom{240}{2}} \cdot P(\overline{R} \mid B) \cdot P(\overline{R} \mid C) = \\ &= \frac{1}{240 \cdot 239} \cdot \big(125 \cdot 124 \cdot 0{,}99^2 + 85 \cdot 84 \cdot 0{,}98^2 + 30 \cdot 29 \cdot 0{,}96^2\big) + \\ &+ \frac{1}{240 \cdot 239} \cdot (2 \cdot 125 \cdot 85 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}98 + 2 \cdot 125 \cdot 30 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}96 + 2 \cdot 85 \cdot 30 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}96) = \\ &= \frac{55\,393{,}428}{240 \cdot 239} \approx 0{,}9657. \end{aligned}$$

A másik kérdésre a választ hasonló gondolatmenettel kapjuk meg:

$$
\begin{aligned}
&P(\text{a fele narancs jó}) = \\
&= \frac{\binom{125}{2}}{\binom{240}{2}} \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}01 + \frac{\binom{85}{2}}{\binom{240}{2}} \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}02 + \frac{\binom{30}{2}}{\binom{240}{2}} \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}04 + \\
&+ \frac{125 \cdot 85}{\binom{240}{2}} \cdot (0{,}99 \cdot 0{,}02 + 0{,}01 \cdot 0{,}98) + \frac{125 \cdot 30}{\binom{240}{2}} \cdot (0{,}99 \cdot 0{,}04 + 0{,}01 \cdot 0{,}96) + \\
&+ \frac{85 \cdot 30}{\binom{240}{2}} \cdot (0{,}98 \cdot 0{,}04 + 0{,}02 \cdot 0{,}96) = \\
&= \frac{1622,642}{240 \cdot 239} \approx 0{,}0283.
\end{aligned}
$$