I. rész

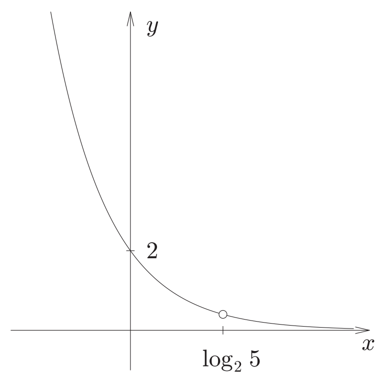
1. *Ábrázoljuk és jellemezzük az alábbi függvényt a lehető legbővebb számhalmazon:*

$$f\colon x \longmapsto \left(\frac{2^x+5}{2^{x+1}-10} - \frac{2^x-5}{2^{x+1}+10} - \frac{50}{25-4^x}\right) : \frac{5\cdot 2^x}{2^x-5}. \qquad (11\ pont)$$

Megoldás. Legyen $a = 2^x$. Ekkor a megfelelő feltételek mellett ($a > 0$ és $a \neq 5$, vagyis $x \neq \log_2 5$):

$$\left(\frac{a+5}{2a-10} - \frac{a-5}{2a+10} - \frac{50}{25-a^2}\right) : \frac{5a}{a-5} =$$

$$= \frac{(a+5)^2-(a-5)^2+100}{2(a-5)(a+5)} \cdot \frac{a-5}{5a} = \frac{20a+100}{2(a+5)} \cdot \frac{1}{5a} = \frac{2}{a}.$$



Az ábrázolandó függvény tehát

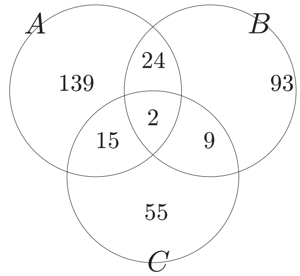
$$f\colon x \mapsto \frac{2}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}.$$

Jellemzése:
– $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\log_2 5\}$,
– $R_f = \mathbb{R}^+ \setminus \left\{\frac{2}{5}\right\}$,
– nullahelye nincs,
– tengelymetszete $y = 2$-nél,
– szigorúan monoton csökkenő $x \in D_f$-en,
– konvex.

2. *Mennyi a valószínűsége, hogy a háromjegyű pozitív egészek közül találomra olyat választunk, mely az 5, a 7, illetve a 11 egyikével sem osztható?* (*12 pont*)

Megoldás. $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ háromjegyű szám van. Legyen A az 5-tel, B a 7-tel és C a 11-gyel osztható számok halmaza. Ekkor

$$\begin{aligned}
|A| &= 180,\\
|B| &= 128,\\
|C| &= 81,\\
|A\cap B| &= 26,\\
|A\cap C| &= 17,\\
|B\cap C| &= 11 \ \text{ és}\\
|A\cap B\cap C| &= 2.
\end{aligned}$$



A 7-tel, vagy 11-gyel, vagy 13-mal oszthatók száma (a logikai szita módszere szerint):

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 337.$$

Tehát a keresett valószínűség:

$$p = \frac{\text{jó esetek száma}}{\text{összes eset}} = \frac{563}{900} = 0{,}626.$$

3. *Matematikus barátunk statisztikát csinál a kiránduláson készített* 500 *fényképéről. Azt találja, hogy a méretük átlaga* 2,84 MB, *s a legnagyobb méretű képe* 3,65 MB-os.

a) Mennyi a méretük szórásának legkisebb értéke?

b) Legfeljebb mekkora lehet a méretük szórása, ha a terjedelem 1,62 MB? (*14 pont*)

Megoldás. *a*) A szórás legkisebb értéke ugyanott van, ahol a négyzeteé. Így D^2 minimumát keressük, s a számtani és kvadratikus közepek közötti egyenlőtlenséggel adjuk meg azt:

$$D^2 = \frac{(3{,}65 - 2{,}84)^2 + \sum_{i=1}^{499} (2{,}84 - x_i)^2}{500}.$$

Ekvivalens átalakításokkal:

$$500D^2 - (3{,}65 - 2{,}84)^2 = \sum_{i=1}^{499} (2{,}84 - x_i)^2.$$

A jobb oldalra felírva a számtani-kvadratikus közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\sum_{i=1}^{499} (2{,}84 - x_i)^2 = 499 \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{499} (2{,}84 - x_i)^2}{499}} \right)^2 \geq 499 \left(\frac{\sum_{i=1}^{499} |2,84 - x_i|}{499} \right)^2 \geq$$

$$\geq 499 \left(\frac{\sum_{i=1}^{499} (2{,}84 - x_i)}{499} \right)^2 \geq 499 \left(\frac{499 \cdot 2,84 - \sum_{i=1}^{499} x_i}{499} \right)^2.$$

A kapott kifejezés értéke konstans, hiszen a $\sum_{i=1}^{499} x_i$ a maradék 499 elem összege, $500 \cdot 2{,}84 - 3{,}65$. Ez azt jelenti, hogy a bal oldalon lévő kifejezés értéke legalább ekkora, s az egyenlőség akkor áll fenn, ha minden maradék elem ugyanakkora és legfeljebb 2,84. Legyen ez az érték x^*. Ekkor az átlagra igaz, hogy $2{,}84 = \dfrac{499x^* + 3{,}65}{500}$, amiből $x^* = 2{,}8384 < 2{,}84$. Tehát a szórás $x^* = 2{,}8384$ esetén lesz a legkisebb, s ez a minimális érték $D = 0{,}036$.

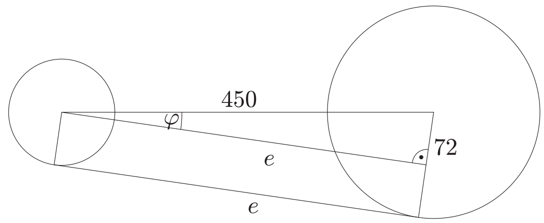
b) A legnagyobb szórás akkor lesz, ha minden kép mérete a legtávolabb van az átlagtól. Miután a legnagyobb 3,65 MB-os, ebből kell 250 darab, s 250 darab kell abból a méretből, mely az ellenkező irányban tér el ugyanennyit az átlagtól. Ekkor a szórás:

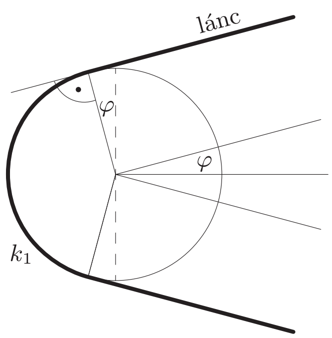
$$D = \sqrt{\frac{250 \cdot (x_{\max} - \overline{x})^2 + 250 \cdot (\overline{x} - x_{\min})^2}{500}} = \sqrt{\frac{500(3{,}65 - 2{,}84)^2}{500}} = 3{,}65 - 2{,}84 = 0{,}81.$$

4. *A fixhajtású kerékpárnál fontos a lánc feszessége. Az első lánckerék sugara* 104 mm, *fogszáma 52, a hátsó lánckerék adatai pedig* 32 mm *és* 16 *fog. (A lánckerék sugarát úgy mértük, hogy az megegyezik egy, a lánckerékre illeszkedő láncszem középpontjának a lánckerék középpontjától mért távolságával.) Milyen hosszú láncra van szükségünk, ha a két lánckerék középpontjának távolsága* 450 mm? *Hány láncszemet tartalmaz ez a lánc?* (*14 pont*)

Megoldás. Az érintőszakasz hossza: $e = \sqrt{450^2 - 72^2} = 444{,}2$ mm.

$$\varphi = \arcsin \frac{72}{450} \approx 9{,}207^\circ.$$





A középponti szögek tételét felhasználva (miszerint az ívek aránya egy adott körben megegyezik a hozzájuk tartozó középponti szögek arányával):

$$\frac{k_1}{2\cdot 32\cdot \pi}=\frac{180^\circ-2\varphi}{360^\circ}\implies k_1\approx 90{,}25\text{ mm},$$
$$\frac{k_2}{2\cdot 104\cdot \pi}=\frac{180^\circ+2\varphi}{360^\circ}\implies k_2\approx 360{,}15\text{ mm}.$$

Így a teljes lánc hossza: $l=k_1+k_2+2e\approx 1338{,}8$ mm.

Egy láncszem hossza: $\dfrac{2\cdot 104\cdot \pi}{52}\approx 12{,}566$ mm. Így a láncszemek számára $n\approx \dfrac{1338{,}8}{12{,}566}\approx 106{,}54$-et kapunk. Tehát legalább 107 láncszemre van szükségünk.

II. rész

5. *Milyen $m\in\mathbb{R}$ paraméter esetén lesz hegyesszögű α megoldása a következő egyenletnek?*

$$\cos^2\alpha-(18-2m)\cos\alpha+m^2+3m+3=0 \qquad (\textit{16 pont})$$

Megoldás. Ahhoz, hogy legyen gyök, $D\geq 0$-nak kell teljesülnie:

$$(18-2m)^2-4\cdot 1\cdot\left(m^2+3m+3\right)\geq 0,$$
$$324-72m-12m-12\geq 0,$$
$$\frac{26}{7}\geq m.$$

Ahhoz, hogy pozitív gyöke legyen (α akkor hegyesszögű, ha $\cos\alpha>0$), mivel $x_1\cdot x_2>0$ ($m^2+3m+3>0$ igaz állítás), az $x_1+x_2>0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Ebből ismét a Viète-formulák felhasználásával az $m<9$ feltételt kapjuk.

A koszinusz függvény maximális értéke 1, s a feltétel miatt 1 sem lehet (α hegyesszög, így a 0° érték nem lehetséges). Emiatt a $\cos\alpha<1$ feltételnek is fenn kell állnia. A

$$\frac{18-2m\pm\sqrt{312-84m}}{2}<1$$

egyenlőtlenségből a

$$\pm\sqrt{78-21m}<m-8$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A korábbi feltételek miatt ennek a jobb oldala negatív, tehát a bal oldalon lévő kifejezésnél is csak a negatív érték lehetséges. A négyzetre emelés során a relációjel megfordul:

$$\begin{aligned} 78 - 21m &> m^2 - 16m + 64, \\ 0 &> (m+7)(m-2), \\ -7 < m &< 2. \end{aligned}$$

A feltételek alapján a megoldás:

$$\underbrace{m \leq \frac{26}{7} \quad \text{és} \quad m < 9 \quad \text{és} \quad -7 < m < 2}_{-7<m<2}.$$

6. *Ábrázoljuk a következő ponthalmazt a koordinátasíkon:*

$$H := \left\{ P(x;y) \;\middle|\; \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} \leq 0 \;\wedge\; |y| \leq 1 \right\}$$

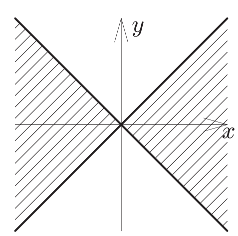
Mekkora a ponthalmaz területe? (*16 pont*)

Megoldás. A nevezőben lévő kifejezés az origó középpontú egységkör egyenletére emlékeztet. Emiatt a következő eseteket érdemes megvizsgálni:

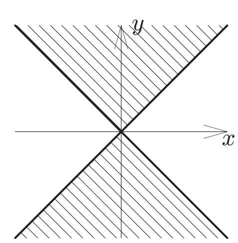
a) a körön belüli pontokról, vagy

b) a körön kívüli pontokról van szó.

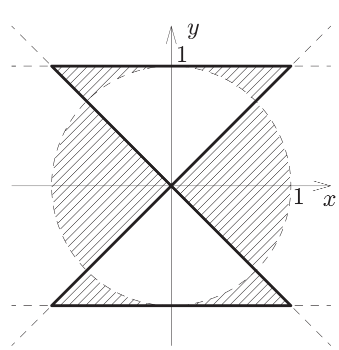
a) Ha a nevező negatív, vagyis az origó középpontú egységkörön belüli pontokról van szó, akkor a számlálónak nem-negatívnak kell lennie. Ekkor az $x^2 \geq y^2$ áll fenn. E második feltételnek az *ábrán* látható pontok tesznek eleget.



b) Ha a nevező pozitív, vagyis az origó középpontú egységkörön kívüli pontokról van szó, akkor a számlálónak negatívnak kell lennie. Ekkor az $x^2 \leq y^2$ áll fenn. E második feltételnek az *ábrán* látható pontok tesznek eleget.



A két fenti esetet, az egységkört, valamint az $|y| \leq 1$ feltételeket összevetve a következő ponthalmazt kapjuk:



A két negyedkör-cikk területéhez hozzáadva a négy kis szögletet kapjuk a keresett területet:

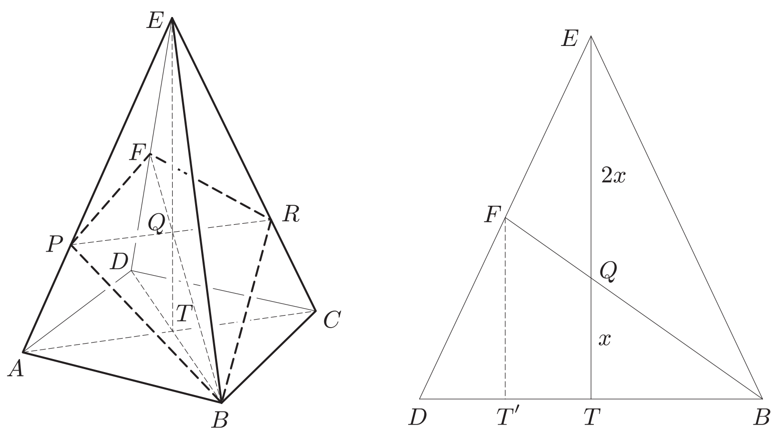
$$T = 2 \cdot \frac{1^2\pi}{4} + 4 \cdot \left[\frac{1 \cdot 1}{2} - \frac{1^2\pi}{8}\right] = \frac{\pi}{2} + 2 - \frac{\pi}{2} = 2.$$

7. *Az $ABCD$ négyzet alapú egyenes gúla AE odalalélének P pontjára teljesül, hogy $AP : PE = 1 : 2$, valamint a CE oldalélének R pontjára igaz, hogy $CR : RE = 1 : 2$.*

a) Milyen arányban osztja a B csúcson, valamint a P és R pontokon átmenő sík a DE élt?

b) Hány százaléka a keletkező síkmetszet területe az alap négyzetlap területének, ha a gúla magassága az alaplap átlójának másfélszerese? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel az $ABCDE$ egyenes gúla, a PR szakasz a magasságot a Q harmadolópontban metszi. Vegyük a gúla DBE síkmetszetét. A DBE háromszögben a TE súlyvonalat a Q pont $1 : 2$ arányban osztja, tehát Q súlypont. Így a BQ meghosszabbítása a DE oldalt az F felezőpontban metszi (szintén súlyvonal).



b) Az egyenes gúla szimmetriája miatt $BF \perp PR$, a síkmetszet deltoid. Területét az átlók segítségével számoljuk ki. A PR szakasz az AC 2/3-ad része, valamint a T' pont felezi az TD szakaszt (párhuzamos szelők tétele).
A feltétel szerint $TE = 3x = \frac{3}{2}DB$, tehát $TB = x$, amiből következik, hogy $\alpha = 45°$. Innen

$$\frac{T_{BRFP}}{T_{ABCD}} = \frac{\frac{PR \cdot BF}{2}}{\frac{AC \cdot BD}{2}} = \frac{\frac{2}{3}AC \cdot \sqrt{2}BT'}{AC \cdot BD} = \frac{\frac{2}{3}AC \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{4}BD}{AC \cdot BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tehát a $BRFP$ négyszög területe kb. 70,7%-a az alaplap területének.

8. *Készítsünk „mérőhengert", mely az $f(x) = x^{10}$, ahol $x \in [-1; 1]$ függvény y tengely körüli megforgatásával jön létre. A koordinátarendszer egységeit* dm-ben *mérjük. Készítsünk deciliterenként beosztást az oldalán. (Milyen magasságoknál lesznek az osztásvonalak?)* (*16 pont*)

Megoldás. Az egyszerűbb számolás kedvéért döntsük meg a mérőedényt 90°-kal. Így a megadott $f(x) = x^{10}$ függvény helyett annak inverzét, a $g(x) = \sqrt[10]{x}$ függvényt kell az x tengely körül megforgatnunk. A megforgatott függvény h_i intervallumhatárait kell úgy meghatározni, hogy a keletkező szeletek térfogata 1 legyen:

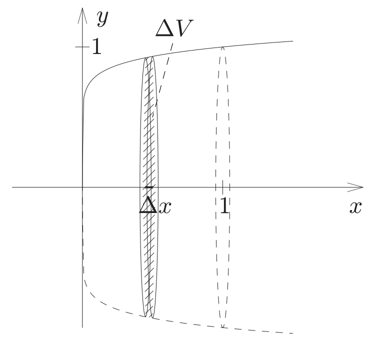
$$\int_0^{h_1} g(x)\,dx = \int_0^{h_1} \left(\sqrt[10]{x}\right)^2 \pi\,dx = 1$$

$$\pi \int_0^{h_1} x^{\frac{1}{5}}\,dx = 1,$$

$$\frac{5}{6}\pi \left[x^{\frac{6}{5}}\right]_0^{h_1} = 1,$$

$$\frac{5}{6}\pi h_1^{\frac{6}{5}} = 1,$$

$$h_1 \approx 0{,}4484 \text{ (dm)}.$$



Hasonlóképpen az integrált 2-ig számolva kaphatjuk a $h_2 \approx 0{,}7990\,(\mathrm{dm})$ értéket. A következő osztás már nem fér az edény oldalára.

9. *Egy „piramisjáték” elindítója a második hétre már 4 embert sikeresen beszervezett, így öten lettek. (Az első hét a tervezés ideje volt.) A szervezés olyan jól sikerült, hogy a harmadik héttől kezdve minden héten a következő sorozat szerint alakult az összes résztvevő száma:* $a_n = 3a_{n-1} - 8$.
a) Hányan vettek részt az ötödik héten a játékban?
b) Mutassuk meg, hogy az összes résztvevők száma monoton növekvő sorozatot alkot.
c) Írjuk fel explicit alakban a sorozatot.
d) Igazoljuk, hogy a sorozat utolsó számjegyei $n = 2$-től kezdve periodikus sorozatot alkotnak. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Helyettesítsük be az egymást követő értékeket az adott rekurzív képletbe:

$$a_2 = 5, \qquad a_3 = 3 \cdot 5 - 8 = 7,$$
$$a_4 = 3 \cdot 7 - 8 = 13, \qquad a_5 = 3 \cdot 13 - 8 = 31.$$

b) a_n akkor monoton növekedő, ha $3 \cdot a_{n-1} - 8 \geq a_{n-1}$, azaz $2a_{n-1} \geq 8$ teljesül $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$ esetén.
Ezt teljes indukcióval tesszük meg:
(*i*) Belátható, hogy az első elemekre teljesül: $10 \geq 8$, $14 \geq 8$, ...
(*ii*) Tegyük fel, hogy egy tetszőleges $(k-1)$-dik elemre teljesül az állítás, azaz $2a_{k-1} \geq 8$, ahol $k > 2$.
(*iii*) Belátjuk, hogy a következő elemre, a_k-ra is teljesül az állítás:

$$2a_k \underset{\text{def.}}{=} 6a_{k-1} - 16 = 3 \cdot (2a_{k-1}) - 16 \underset{\text{ind. felt.}}{\geq} 24 - 16 = 8.$$

Tehát a sorozat valóban monoton növekedő.

c) Írjuk fel az egyes elemek részletes kiszámítását:

$$\begin{aligned} a_4 &= 3 \cdot (3 \cdot 5 - 8) - 8, \\ a_5 &= 3 \cdot \big(3 \cdot (3 \cdot 5 - 8) - 8\big) - 8, \\ &\ \vdots \\ a_n &= 3^{n-2} \cdot 5 - 8 \cdot \big(3^{n-3} + 3^{n-4} + \dots + 3^0\big). \end{aligned}$$

Felhasználva a mértani sorozat első n elemére vonatkozó összegképletet:

$$a_n = 5 \cdot 3^{n-2} - 8 \cdot \frac{3^{n-2} - 1}{3 - 1} = 5 \cdot 3^{n-2} - 4 \cdot 3^{n-2} + 4 = 3^{n-2} + 4 \quad (n \geq 2).$$

d) Írjuk fel az első néhány végződést: 5, 7, 3, 1, 5, ...
A negyedik elem után az ötös végződést kapjuk ismét, amelyen a rekurzió képletét alkalmazva ismét a 7-es végződést kapjuk stb.

(A kétjegyű számokat $10N + c$ alakban felírva megmutatható, hogy az egyesek helyiértékén álló jegyen végzett művelet adja az újabb végződést, mely független a többi számjegytől: $3 \cdot (10N + c) - 8 = (3N) \cdot 10 + (3c - 8)$.)