

I. rész

1. Számítsuk ki az A kifejezés pontos értékét:

$$A = \left(\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}} \right)^{-2} \cdot (14 - \sqrt{12} - \sqrt{96})^2 \cdot \left(\frac{2^2}{2015} \right)^{-1}. \quad (11 \text{ pont})$$

2. Egy sakkversenyen mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig 25 játszmát fejeztek be, és mindenkinek még hátravan 4 játszmája. Hány sakkozó vesz részt a versenyen? (12 pont)

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{625^x - 81^x}{375^x + 135^x} = \frac{2}{\sqrt{15}}. \quad (14 \text{ pont})$$

4. Egy egyenlő szárú háromszög súlypontja illeszkedik a háromszög beírható körére. Mekkora a háromszög szögei? Bizonyítsuk be, hogy a beírt kör szárazon lévő két érintési pontja és a száraz közös végpontja három egyenlő részre osztja a háromszög területét. (14 pont)

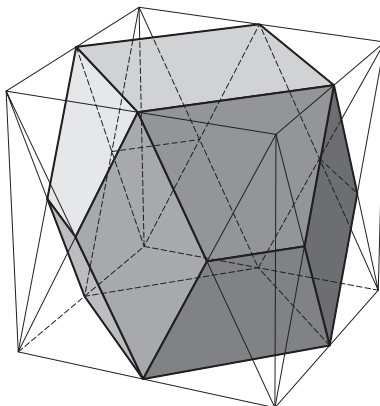
II. rész

5. Vizsgáljuk meg az alábbi egyenlet megoldhatóságát az m paraméter függvényében:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x + 3m^2 = 4m(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x). \quad (16 \text{ pont})$$

6. A teafűből a forró vízben a kellemes ízelet adó anyagok gyorsabban kioldódnak, mint a káros csersavak. Előfordul, hogy a teafüvet véletlenül hosszabb ideig hagyjuk a vízben, mint szükséges lenne, ilyenkor a csersavaktól keserű lesz a tea. Az időt percekben mérve, a $t \in [0, 30]$ intervallumon közelítsük a percenként kioldódó csersav mennyiségét a $v(t) = -t^3 + 25t^2 + 150t$ függvénnyel. Hány százalékkal több csersav oldódik ki a teafűből, ha a szükséges 5 perc helyett 10 vagy 15 percig benne felejtjük a filtert a vízben? (16 pont)

7. Egyik lapjára állított 18 cm élhosszúságú kockából kiindulva bonbonos dobozt tervezünk. Az alap és fedőlap oldalfelező pontjait összekötjük a szemközti lap közelebbi csúcaival, az *ábrának* megfelelően. A keletkező háromszög alapú gúlákat elhagyjuk a kockából. Az így létrejött testet, a bonbonos dobozt, papírból fogjuk elkészíteni, 30% ragasztási felület, illetve hulladék ráhagyásával. Mennyi papírra lesz szükségünk? Mekkora lesz a doboz térfogata? Mekkora szöget zárnak be a trapéz alakú lapok egymással? (16 pont)



8. Mekkora szögben látszik az alábbi körök közös húrja az origóból?

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 &= 0, \\ x^2 + y^2 - 8x - 8y + 22 &= 0. \end{aligned} \quad (16 \text{ pont})$$

9. A zöldséges 1 hetes, 2 hetes és 3 hetes narancsokat árul. Annak a valószínűsége, hogy egy 1 hetes narancs romlott, 0,01. Ez a valószínűség a tapasztalatok szerint hetente megduplázódik. A zöldségesnél jelenleg 25 kg 1 hetes, 17 kg 2 hetes és 6 kg 3 hetes narancs van. A narancsok tömege egyformának tekinthető, 5 db 1 kg. Egyik reggel a pakolásakor összekeveredtek a narancsok.

- Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott narancs romlott?
- Véletlenszerűen kiválasztottunk egy narancsot, ami jó. Mekkora a valószínűsége, hogy 3 hetes?
- Vettünk 2 kg narancsot. Mekkora a valószínűsége, hogy mind jó? És annak, hogy a fele romlott? (16 pont)