1. *Egy n tagú társaság minden tagja legalább egy, de legfeljebb $n-2$ tagot ismer a többiek közül, az ismeretség mindig kölcsönös. Bizonyítsuk be, hogy a társaság négy alkalmasan választott tagja leültethető egy asztal köré úgy, hogy mindegyikük pontosan egyet ismerjen a két asztalszomszédja közül.*

1. megoldás. Legyen A a társaság egy olyan tagja, aki a társaságból a lehető legtöbb személyt ismeri. Legyen B egy olyan illető, akit A nem ismer, C pedig legyen B egy ismerőse. Mivel C-nek legfeljebb annyi ismerőse van, mint A-nak, ezért függetlenül attól, hogy A és C ismeri-e egymást, A-nak legalább annyi C-től különböző ismerőse van, mint ahány A-tól különböző ismerőse van C-nek. A konstrukció folytán C ismeri azt a B-t, akit A nem ismer. Ezért A-nak bizonyosan van olyan C-től különböző D ismerőse, akit C nem ismer. Ekkor ha A, B, C és D ebben a sorrendben ülnek az asztalhoz, akkor éppen a feladatban kirótt feltételt teljesítik. □

2. megoldás. Készítsük el az élszínezett G gráfot az n pontú teljes gráfból az alábbiak szerint. A G gráf csúcsait kölcsönösen egyértelműen megfeleltetjük a társaság tagjainak, és G egy éle akkor legyen piros, ha a csúcsoknak megfelelő tagok nem ismerik egymást, egyébként pedig az adott él színe legyen zöld.

A bizonyítandó állítás átfogalmazható úgy, hogy ha a teljes gráf éleit úgy színezzük pirosra és zöldre, hogy minden csúcsból indul piros és zöld él is, akkor a gráfban van tarka négyszög, azaz négy különböző A, B, C és D csúcs úgy, hogy míg az AB és CD élek pirosak, addig a BC és DA élek zöldek. Az alábbiakban ezt az állítást fogjuk n szerinti teljes indukcióval igazolni. Ez az állítás $n=1$ esetén nyilvánvalóan teljesül, hiszen a feltevés lehetetlent kíván.

Tegyük fel tehát, hogy legfeljebb $n-1$ csúcsú gráfokra már igazoltuk az indukciós állítást, és a vizsgált G-nek n csúcsa van. Legyen A a G egy csúcsa. Ha az A törlésével keletkező $G-A$ gráf minden csúcsából indul piros és zöld él is, akkor kész vagyunk, hisz az indukciós feltevés miatt $G-A$-ban van tarka négyszög, ami persze egyúttal G-ben is tarka négyszög. Feltehetjük tehát, hogy $G-A$ egy B csúcsából (mondjuk) csak piros él indul (és persze AB zöld). Ha most $G-B$-ben nincs tarka négyszög, akkor az indukciós feltevés miatt $G-B$-ben van olyan C csúcs, amelyből csupa egyszínű él indul.

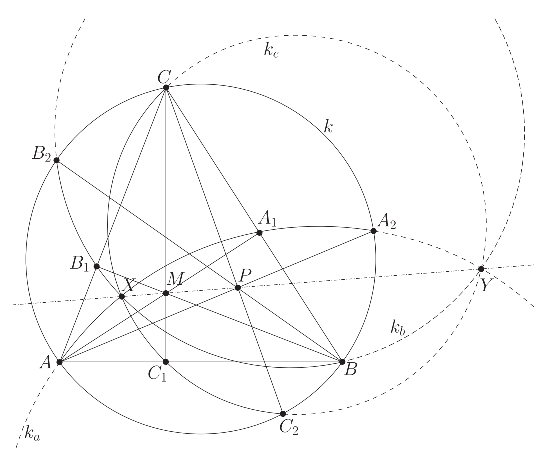
Ha $A=C$, akkor a zöld AB élen kívül A-ból és B-ből csak piros élek indulnak. Legyen BX egy piros, XY pedig egy zöld él. Mivel XY zöld, ezért $Y \neq A$, tehát $ABXY$ tarka négyszög. Ha pedig $A \neq C$, akkor legyen AD egy A-ból induló piros él. A konstrukció folytán AB zöld, BC piros, CD zöld és DA piros, tehát $ABCD$ egy G-beli tarka négyszög. Az indukciós állítást ezzel igazoltuk, a bizonyítás ezzel teljes. □

Megjegyzés. Általában nem igaz, hogy egy 4-személyesnél nagyobb asztalhoz is biztosan le tudjuk ültetni a társaság néhány tagját a feladatban leírt módon. Ha ugyanis a társaságban van két olyan ismerős, hogy egyikük se ismeri a társaság egyetlen más tagját sem, továbbá e két ismerősön kívül mindenki mindenkit ismer, akkor teljesül a feladatban kirótt feltétel, de 4-nél több ember nem ültethető le a kívánt módon.

2. *Legyen ABC hegyesszögű háromszög, és legyen P olyan pont a háromszög belsejében, amely nem illeszkedik a háromszög egyik magasságvonalára sem. Az A, B, illetve C csúcsból induló magasság talppontját jelölje rendre A_1, B_1, illetve C_1. Messék a háromszög köré írt kört az AP, BP, CP félegyenesek rendre az A_2, B_2, C_2 pontokban. Bizonyítsuk be, hogy az AA_1A_2, BB_1B_2 és CC_1C_2 körívek egy ponton mennek át.*

Megoldás. Jelölje az ABC, AA_1A_2, BB_1B_2 és CC_1C_2 köröket rendre k, k_a, k_b, illetve k_c; az ABC háromszög magasságpontja legyen M. A feltétel szerint az ABC háromszög hegyesszögű, ezért az A_1, B_1, C_1, M pontok k belsejében vannak.

A k kerületén az AA_2, BB_2 és CC_2 pontpárok páronként elválasztják egymást, ezért a k_a, k_b és k_c körök közül bármelyik kettő metszi egymást úgy, hogy az egyik metszéspontjuk k belsejében, a másik metszéspontjuk k-n kívül helyezkedik el. Legyen a k_a és a k_b körök metszéspontja k belsejében X, a másik metszéspontjuk legyen Y. Azt fogjuk megmutatni, hogy a k_c kör is átmegy az X és Y pontokon.



A P pont k-ra vonatkozó hatványa

$$PA \cdot PA_2 = PB \cdot PB_2 = PC \cdot PC_2.$$

Ezek a szorzatok egyben a P hatványai a k_a, k_b, illetve k_c körökre. Tehát a P pontnak a k_a, k_b és k_c körökre vonatkozó hatványa ugyanakkora.

Hasonlóan, az M pontnak az ABA_1B_1, BCB_1C_1, CAC_1A_1 körökre vonatkozó hatványa

$$MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1 = MC \cdot MC_1.$$

Ezek a szorzatok pedig az M hatványai a k_a, k_b, illetve k_c körökre. Tehát az M pontnak a k_a, k_b és k_c körökre vonatkozó hatványa is ugyanakkora.

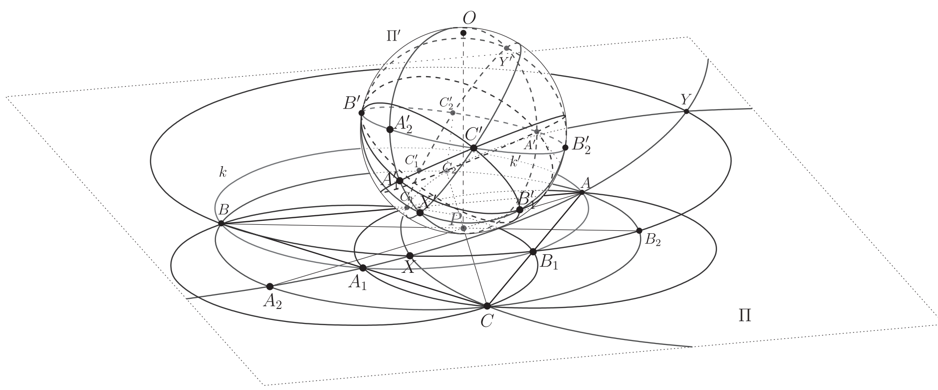
A feltétel szerint P és M különböző. Így a PM egyenes a k_a, k_b és k_c körök közös hatványvonala. A három kör tehát egy körsorhoz tartozik, így k_a és k_b metszéspontjain átmegy k_c is.

Ezzel megmutattuk, hogy a k_a, k_b, illetve k_c körök k-n belüli ívei, nevezetesen az AA_1A_2, BB_1B_2 és CC_1C_2 körívek egy ponton mennek át. $\square$

Megjegyzés. Egy alkalmas sztereografikus projekcióval (térbeli inverzióval) visszavezethetjük az állítást arra a jól ismert tényre, hogy a gömbfelületen bármely három körvonal páronként vett hatványvonalai egy átmérőre illeszkednek.

Jelöljük Π-vel az ABC háromszög síkját, és legyen Γ az a gömb, amelynek a k főköre. A P pontban állítsunk merőleges egyenest Π-re; legyen ennek egyik döféspontja a Γ-val O. Invertáljuk az ábrát az O középpontú, P-n átmenő gömbre; a szokásos módon tetszőleges x objektum képét jelöljük x'-vel. Az inverzió jól ismert tulajdonságai szerint a Π sík képe az OP átmérőjű Π' gömb; a Π síkban fekvő körök képei a gömbfelületen fekvő körvonalak. Speciálisan, a BCB_1C_1, a CAC_1A_1 és az ABA_1B_1 körök képei a $B'C'B_1'C_1'$, a $C'A'C_1'A_1'$ és az $A'B'A_1'B_1'$ körvonalak.

A Γ gömb definíciója szerint a Π sík és a Γ gömb merőlegesen metszi egymást a k kör mentén. Mivel az inverzió szögtartó, az Γ' sík és a Π' gömb is merőlegesen metszi egymást a k' kör mentén, így k' a Π' gömbnek főköre.



Vegyük észre, hogy az A' és A_2' pontokon a Π' gömbnek legalább két különböző főköre is átmegy: ilyen a k' kör, és az $OA'PA_2'$ kör is. (Utóbbi átmegy az átellenes O és P pontokon, de nem szerepel az *ábrán.*) Ebből következik, hogy a Π' gömbön A' és A_2' átellenes pontok, és az $A'A_1'A_2'$ körvonal is főkör. Ez a főkör átmegy a $C'A'C_1'A_1'$ és az $A'B'A_1'B_1'$ körök metszéspontjain, A'-n és A_1'-n; tehát az $A'A_1'A_2$ körvonal nem más, mint a $C'A'C_1'A_1'$ és az $A'B'A_1'B_1'$ körök hatványvonala.

Hasonlóan kapjuk, hogy a $B'C'B_1'C_1'$ és az $A'B'A_1'B_1'$ kör hatványvonala a $B'B_1'B_2'$ főkör, illetve hogy a $B'C'B_1'C_1'$ és az $C'A'C_1'A_1'$ kör hatványvonala a $C'C_1'C_2'$ főkör.

A három hatványvonal két, egymással átellenes közös ponton megy át; jelölje ezeket X' és Y' úgy, hogy X és O a k' főkör ellentétes oldalán legyenek. Az X', Y' pontokat O-ból visszavetítve a Π síkra, megkapjuk az AA_1A_2, BB_1B_2, és CC_1C_2 körök közös pontjait: az X pont a k körön belül, az Y pont a k körön kívül lesz.

3. *Legyen K egy zárt konvex sokszöglemez, X pedig egy pont K síkjában. Mutassuk meg, hogy X a K sokszöglemez belsejébe vagy kerületére vihető a K bizonyos oldalegyeneseire alkalmas sorrendben végzett véges sok tengelyes tükrözés egymásutánjával, ha ugyanarra az oldalegyenesre többször is tükrözhetünk.*

Megoldás. Alkossák a H halmazt a K sokszöglemez S síkjának mindazon pontjai, amelyek véges sok, a K oldalegyeneseire végzett tükrözés egymásutánjával K-ba vihetők. A mi feladatunk a $H = S$ egyenlőség igazolása. Világos, hogy $K \subseteq H$, továbbá a konstrukció folytán H tükrös K minden oldalegyenesére. Legyen $\mathcal{E}$ a H tükörtengelyeinek halmaza. Világos, hogy ha $t_1, t_2 \in \mathcal{E}$ és t_1' a t_1 tükörképe t_2-re, akkor $t_1' \in \mathcal{E}$, ahol azaz H tükrös minden olyan egyenesre is, amelyet H egy tükörtengelyének a H egy másik tükörtengelyére való tükrözésével kapunk.

Mivel $K \subseteq H$, ezért H tükörszimmetriái folytán K-nak minden olyan K' képe is H-ban fekszik, amit K-ból $\mathcal{E}$-beli egyenesekre vonatkozó tükrözések egymásutánjával kapunk. Ráadásul az így kapható K' sokszögek minden oldalegyenese $\mathcal{E}$-beli, azaz a H egy tükörtengelye.

Jelölje $r \geq 0$ esetén K^r az S sík azon pontjait, amelyek legfeljebb r távolságra vannak a K sokszöglemeztől. Megmutatjuk, hogy $K^r \subseteq H$ teljesül alkalmas $r > 0$ esetén. Válasszunk egy olyan $R > 0$ számot, amelyre a K csúcsai köré írt R sugarú körlemezek mindegyikének a K-val vett metszete körcikk. Egy ilyen R sugarú körcikk tükörképe a körcikket határoló sugár egyenesére H-ban fekszik, hiszen a tükrözés tengelyére H szimmetrikus. Sőt: ha a tükörképként kapott körcikket tükrözzük egy azt határoló sugár egyenesére, akkor az így kapott kép is H-ban marad, és ugyanez az így kapott tükörképek tükörképeire is igaz. Ezért a K csúcsai köré írt R sugarú körlemezek mindegyike része H-nak. Tekintsük a K sokszöglemeznek, a K csúcsai köré írt R sugarú köröknek és a K-nak a K oldalegyeneseire vett tükörképeinek K^* unióját. Könnyen látható, hogy van olyan $r > 0$ szám, amelyre $K^r \subseteq K^*$ teljesül, tehát alkalmas n-re

$$K^r \subseteq K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n \subseteq H, \tag{1}$$

ahol minden egyes K_i-t a H bizonyos tükörtengelyeire való tükrözések egymásutánjával kapunk K-ból.

Most tegyük fel, hogy $K^t \subseteq H$ valamely $t > 0$-ra. Vegyük észre, hogy ha azokat a tükrözéseket, amelyek a K sokszöget K_i-be viszik a K helyett a K^t alakzatra végezzük el, akkor a kapott kép éppen K_i^t lesz. Vagyis ha $K^t \subseteq H$, akkor $K_i^t \subseteq H$, amiből (1) miatt

$$K^{(r+t)} \subseteq K_1^t \cup K_2^t \cup \ldots \cup K_n^t \subseteq H$$

következik. Az adódott tehát, hogy ha $K^t \subseteq H$, akkor $K^{t+r} \subseteq H$. Láttuk azonban, hogy $K^r \subseteq H$, ezért $K^{2r} \subseteq H$, innen $K^{3r} \subseteq H$ stb. Így aztán

$$H \subseteq S = K^r \cup K^{2r} \cup K^{3r} \cup \ldots \subseteq H$$

adódik, ahonnan $H = S$ következik, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. $\square$

Megjegyzések. 1. Úgy kaphatunk egy lehetséges másik megoldást a feladatra, ha követjük a fenti bizonyítás első két bekezdését, majd azt igazoljuk, hogy az S sík lefedhető azokkal a K-val egybevágó sokszöglemezekkel, amelyeket K-ból megkaphatunk annak az operációnak a véges sokszori alkalmazásával, amelyben egy sokszöglemezt tükrözünk annak egy oldalegyenesére. Minden így kapott K' sokszöglemez ugyanis része H-nak, hiszen H szimmetrikus az operáció során használt tükörtengelyekre. Érdemes megfigyelni az alábbiakat. Legyen P a K sokszöglemez S síkjának egy pontja. Kössük össze P-t a K egy Q belső pontjával, és indítsunk el egy biliárdgolyót Q-ból a QP félegyenes mentén. Ha a K sokszöglemezt egy biliárdasztalnak gondoljuk, amelynek határát elérve a bilárdgolyó a fizikai törvényeknek megfelelően pattan vissza (azaz úgy, hogy a visszapattanó golyó pályáját tükrözve az éppen elért oldal egyenesére pontosan az adott oldal elérését megelőző pályaegyenes meghosszabbítását kapjuk), akkor a K sokszöglemeznek az a pontja, amelybe a biliárdgolyó $|\overline{PQ}|$ távolság megtétele után kerül, egy olyan pont lesz, amelybe P betükrözhető. Ha a feladat megoldását erre a megfigyelésre szeretnénk alapozni, akkor vizsgálni kell, mi is történik akkor, ha a biliárdgolyó az útja során K egy csúcsába jut. Nem lehetetlen ezt az esetet jól kezelni, de azt sem nehéz igazolni, hogy ilyenkor Q helyett választható K-nak egy másik Q' pontja, amelyből a golyót útjára indítva már nem ütközünk K csúcsába. Egy másik nehézség annak igazolása, hogy bármelyik pontból bármelyik irányba is indítjuk a biliárdgolyót, az tetszőlegesen nagy távolságot meg tud tenni a K sokszöglemezen. Ennek belátását az olvasóra bízzuk.

2. Könnyen látható, hogy a feladatban nem lényeges feltétel a K sokszöglemez konvex volta. Tekintsük ugyanis K összes oldalegyenesét. Ezek a síkot konvex tartományokra bontják fel. A konstrukcióból adódóan minden ilyen tartomány vagy része K-nak vagy diszjunkt K belsejétől. Tekintsünk egy K-ban elhelyezkedő, konvex K' tartományt. A K' minden oldalegyenese egyúttal oldalegyenese K-nak is, ezért ha a K'-re igazoltuk a feladat állítását, akkor abból azonnal következik, hogy K is rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Sőt, az is igaz, hogy K oldalegyeneseire végrehajtott tükrözések egymásutánjával K síkjának tetszőleges pontja a K-nál szűkebb K' konvex sokszöglemez belsejébe vagy határára tükrözhető.