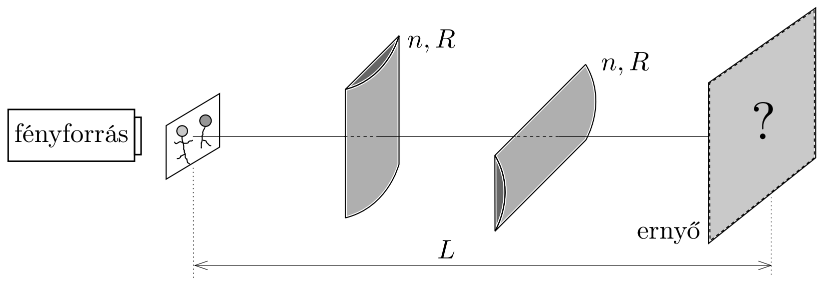
A 2016. évi Nemzetközi Fizikai Diákolimpiára készülő diákok budapesti válogatóversenyének egyik érdekes optika feladata[1] így szólt:

Van két egyforma, vékony hengerlencsénk (egyik oldaluk sík, a másik egy R sugarú hengerpalást egy darabja, a törésmutatója n (1. ábra). *A lencséket egy optikai padon helyezzük el úgy, hogy egymásra merőleges legyen a tengelyük. A leképező rendszer egyik oldalán van egy megvilágított családi fotó, attól L távolságra pedig egy ernyő, amin éppen éles képet látunk.*



1. ábra

a) Hova kell ehhez elhelyezni a lencséket az optikai padon?
b) Hogyan néz ki a kép?
c) Mi történik, ha felcseréljük a két lencsét?

Egy rávezető feladat és a probléma intuitív megoldása

Oldjunk meg először egy – sokak által jól ismert – könnyebb feladatot!

Helyezzünk el egy n törésmutatójú üvegből készült, R sugarú gömbfelület egy darabjával és egy síkfelülettel határolt ($f = R/(n-1)$ fókusztávolságú) vékony lencsét a családi fénykép és az attól L távolságban lévő ernyő közé! Hová tegyük ezt a sík-domború lencsét, ha az ernyőn éles képet szeretnénk kapni?

A leképezési törvény szerint

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{L-t} = \frac{1}{f},$$

ahonnan a lencse és a fénykép (a tárgy) közötti távolságra

$$t^2 - Lt + Lf = 0$$

másodfokú egyenlet adódik, amelynek a megoldásai:

$$t_{1,2} = \frac{L \pm \sqrt{L(L-4f)}}{2}.$$

Látható, hogy a feladatnak csak akkor van valós megoldása, ha $L \geq 4f$, és ha L határozottan nagyobb, mint $4f$, akkor két, egymástól

$$H = t_1 - t_2 = \sqrt{L(L-4f)}$$

távolságban található megoldásunk is lesz.

Visszatérve az eredeti (a két hengerlencsés) problémához, azt sejthetjük, hogy a két lencse „egymástól függetlenül" töri meg a fénysugarakat. A bal oldali hengerlencse vízszintes síkban úgy működik, mint egy *gömbi lencse,* függőlegesen pedig mint egy *plánparalel lemez*, a jobb oldali viszont éppen fordítva. Akkor lesz éles a kép, ha mindkét lencse (amelyek sem vízszintes, sem függőleges irányban nem „zavarják" egymást) olyan helyen található, ahonnan éppen az ernyőre képezi le a tárgyat. Mivel ($L > 4f$ esetén) két ilyen hely van, ezért ez a – váltott szereposztású – leképezés megfelelően elhelyezett hengerlencsékkel ténylegesen megvalósítható. (A két vékony hengerlencsét keresztben, szorosan egymásra illesztve is elhelyezhetjük a két nevezetes hely bármelyikénél, és akkor ezek ott egyetlen „rendes", gömbi lencseként viselkednek, jóllehet a képalkotásnál jelentős lencsehibák lépnek fel.)

A kép torzított lesz, mert a fényképhez közelebbi hengerlencse (vízszintes irányban) nagyít, a másik pedig (függőleges irányban) kicsinyít. Ha felcseréljük a hengerlencséket, szintén éles képet kapunk, de másképp torzul el a kép: felcserélődik a nyújtás és az összenyomás iránya.

Ez a (két hengerlencsés) feladat nem szokványos geometriájú, hiszen a leképezés csak két, egymásra merőleges síkban emlékeztet a szokásos sík-domború lencsékre. Ezekből az oldal- és felülnézeti vetületekből „raktuk össze" – intuitív módon – a ferdén haladó sugarakhoz tartozó általános esetet. Megnyugtató lenne, ha a kapott – egyébként helyes – eredményt más, független gondolatmenettel is meg tudnánk erősíteni.

[1] *Werner Miklós Antal* (BME Fizikai Intézet) feladata.

A Fermat-elv és a képalkotás

A *Fermat-elv*[2] szerint a fénysugarak olyan útvonalon jutnak el a tárgy valamely pontjából a kép megfelelő pontjába, amelyekre az ún. optikai úthossz (a törésmutatóval szorzott tényleges úthosszdarabok összege) a hozzá közeli útvonalakhoz képest *minimális.* Később – hullámoptikai megfontolások, a *Huygens–Fresnel-elv*[3] alapján – finomították az állítást. Kiderült, hogy nem a *minimum* az igazán lényeges feltétel (és az gyakran nem is teljesül), hanem az, hogy az egymáshoz közeli pályákon haladó fény terjedési ideje (ez a mennyiség az optikai úthosszal arányos) „első közelítésben" ugyanakkora legyen, vagyis ez az idő a pályák eltérésére jellemző kis mennyiségnek csak 1-nél magasabb hatványa szerint változzék meg. (Az ilyen, első közelítésben változatlan kifejezéseket *stacionáriusnak* nevezik. A lokális minimum helyénél a „simán változó" (differenciálható) függvény stacionárius, de ez fordítva nem igaz.)

A Huygens–Fresnel-elv szerint a stacionárius pálya közelében lévő, de attól különböző pályákat is „kipróbáló" fényhullámok jó közelítéssel azonos idő alatt, tehát azonos fázisban érkeznek meg a „célba", emiatt interferenciával felerősítik egymást.

A képalkotáshoz a fentieknél több is szükséges: ha nem csak egyetlen egy, hanem sok-sok különböző (önmagában mind stacionárius) úton is eljuthat a fény a tárgy pontjaiból a kép pontjaiba, akkor ott intenzitásmaximumot, tehát fényes pontot észlelünk. Ha az egymástól nem túl messzi, de a fény hullámhosszánál lényegesen nagyobb távolságra haladó fénysugarak mindegyikének optikai úthossza stacionárius, akkor ezek *egymással is megegyező* értékűek kell hogy legyenek.

Ez az optikai törvény (amely egységes leírását adja a fény visszaverődésének és törésének) elvi érdekessége és „szépsége" mellett konkrét számolásokra is alkalmas és célravezető lehet, még olyan bonyolultnak látszó esetekben is, mint a hengerlencsék képalkotása.

Közelítő számítások

A számolás során fel fogjuk használni a következő közelítő képleteket:

I. Ha $\varepsilon \ll a$, akkor

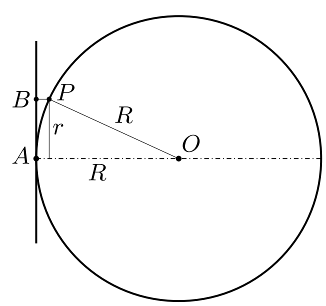
$$\sqrt{a^2+\varepsilon^2} \approx a + \frac{\varepsilon^2}{2a}. \tag{*}$$

A közelítés ε^2 pontosságú, vagyis akkor „válik" egyenlőséggé, ha ε kettőnél nagyobb kitevőjű hatványait elhanyagolhatóan kicsinek tekinthetjük.

Az állítás belátásához emeljük négyzetre a jobb oldalon álló kifejezést:

$$\left(a+\frac{\varepsilon^2}{2a}\right)^2 = a^2 + 2a\cdot\frac{\varepsilon^2}{2a} + \frac{\varepsilon^4}{4a^2} \approx a^2+\varepsilon^2.$$

II. Tekintsünk egy R sugarú gömböt és egy síkot, amely az A pontban érinti a gömböt, valamint a gömb egy olyan P pontját, amely az A ponthoz tartozó AO sugártól $r \ll R$ távolságra van (*2. ábra*).



2. ábra

Ekkor a P pont és az érintősík távolsága:

$$BP = R - \sqrt{R^2-r^2} \approx \frac{r^2}{2R}, \tag{**}$$

amit a (*) összefüggés alkalmazásával, vagy az alábbi algebrai átalakítás segítségével láthatunk be:

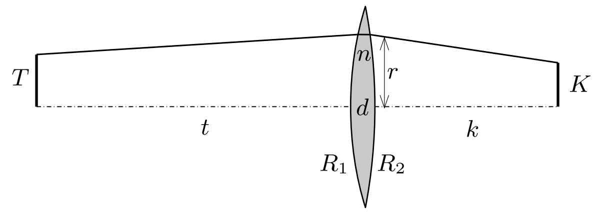
$$R-\sqrt{R^2-r^2} = \frac{\left(R-\sqrt{R^2-r^2}\right)\left(R+\sqrt{R^2-r^2}\right)}{R+\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{r^2}{R+\sqrt{R^2-r^2}} \approx \frac{r^2}{2R}.$$

[2] *Pierre de Fermat* (1601–1665) francia jogász, korának műkedvelő matematikusa.

[3] *Christiaan Huygens* (1629–1695) holland matematikus, fizikus és csillagász; *Augustin-Jean Fresnel* (1788–1827) francia fizikus, legfontosabb eredményeit az optika területén érte el.

Gyűjtőlencse képalkotása

A Fermat-elv alkalmazására először tekintsünk egy egyszerűbb esetet, az R_1 és R_2 görbületi sugarú gömbfelületekkel határolt, d vastagságú (gömbi) gyűjtőlencse képalkotását. Helyezzünk el egy T nagyságú tárgyat a lencsétől t távolságra, és vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett kapunk leképezést a lencsétől k, az optikai tengelytől K távolságban (*3. ábra*). Feltételezzük, hogy d, r, T és K mindegyike sokkal kisebbek, mint t, k, R_1 és R_2, vagyis a lencse „vékony", és a képalkotásban csak az optikai tengelyhez közel haladó fénysugarak vesznek részt.



3. ábra

Megjegyzés. Jól ismert, hogy a gyüjtőlencse által létrehozott valódi kép – az ábrán jelölt helyzettel ellentétben – fordított állású. Várjuk, hogy ez $K<0$ formában „kijöjjön" a Fermat-elvre alapozott számításból.

A 3. ábrán látható fénysugárra az optikai úthossz a (**) közelítés alkalmazásával

$$s=\sqrt{t^2+(T-r)^2}+\frac{r^2}{2R_1}+n\left(d-\frac{r^2}{2R_1}-\frac{r^2}{2R_2}\right)+\frac{r^2}{2R_2}+\sqrt{k^2+(K-r)^2},$$

ami (*) felhasználásával így írható:

$$s\approx\left(t+\frac{T^2}{2t}+k+\frac{K^2}{2k}+nd\right)-\left(\frac{T}{t}+\frac{K}{k}\right)r+\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{k}-(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]\frac{r^2}{2}.$$

Ez a kifejezés (az adott közelítésben) akkor lesz r-től független állandó, vagyis stacionárius, ha r és r^2 együtthatója külön-külön nulla, vagyis fennáll

(1)
$$\frac{K}{T}=-\frac{k}{t},$$

illetve

(2)
$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Megkaptuk tehát, hogy a kép *fordított* állású, és a nagyítás

$$N=\frac{|K|}{T}=\frac{k}{t}.$$

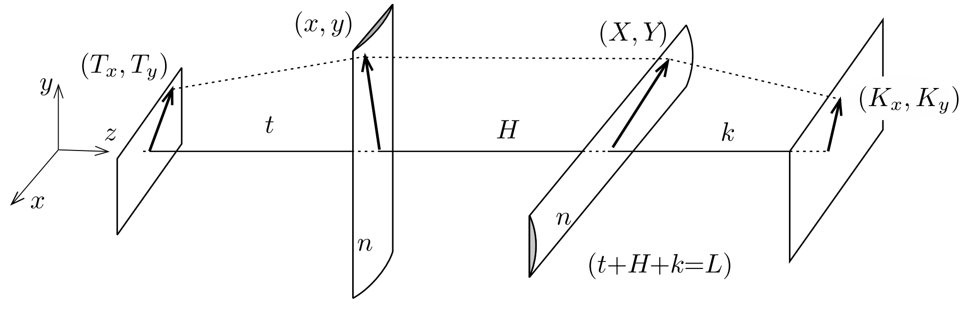
Azt is látjuk, hogy ha a (2) jobb oldalán szereplő (csak a lencse adataitól függő) kifejezést a szokásos módon $1/f$-fel jelöljük, teljesül az ismert *lencsetörvény:*

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f}.$$

(„Melléktermékként" az is kiderült, hogy mi a kapcsolat a lencse anyagának törésmutatója, a görbületi sugarak és az f fókusztávolság között.)

Két hengerlencse képalkotása

Térjünk most rá az eredeti probléma, a két – egymásra merőlegesen elhelyezett – hengerlencse képalkotására. Mivel most a leképező rendszer *nem forgásszimmetrikus,* nem elegendő a tárgy- és képpontoknak az optikai tengelytől mért T és K távolságát megadnunk, hanem egy-egy kétdimenziós vektorral (vagyis 4 adattal) kell jellemezzük azokat (*4. ábra*).



4. ábra

Vizsgáljuk meg, hogy a tárgytól és az ernyőtől mekkora t, illetve k távolságra kell elhelyeznünk a hengerlencséket, hogy a (T_x, T_y) tárgyvektorról (a családi fénykép egyik pontjáról) a (K_x, K_y) képvektor helyén keletkezzen éles kép.

Ha a lencsék vastagsága d, és a fény az (x, y), illetve az (X, Y) koordinátájú pontokban éri el az egyik, illetve másik hengerlencsét, akkor az optikai úthossz így írható fel:

$$s = \sqrt{t^2 + (T_x - x)^2 + (T_y - y)^2} + n\left(d - \frac{x^2}{2R}\right) + \frac{x^2}{2R} + + \sqrt{H^2 + (x - X)^2 + (y - Y)^2} + n\left(d - \frac{Y^2}{2R}\right) + \frac{Y^2}{2R} + + \sqrt{k^2 + (X - K_x)^2 + (Y - K_y)^2}. \tag{4}$$

(A lencsék vékonysága miatt az üvegben haladó fény útját az optikai tengellyel párhuzamosnak tekintettük, az ettől való eltérés ugyanis a figyelembe vett pontosság mellett elhanyagolható.) A (4) kifejezés a (*) közelítés felhasználásával ilyen alakba írható:

$$s(x, y, X, Y) = (t + k + H + 2\,dn) + \frac{(T_x - x)^2}{2t} + \frac{(T_y - y)^2}{2t} + (1 - n)\frac{x^2}{2R} + + \frac{(x - X)^2}{2H} + \frac{(y - Y)^2}{2H} + (1 - n)\,\frac{Y^2}{2R} + \frac{(K_x - X)^2}{2k} + \frac{(K_y - Y)^2}{2k}. \tag{5}$$

A Fermat-elv (annak Huygens-Fresnel-féle általánosítása) szerint az optikai úthossz bármelyik változója, tehát például y szerint is stacionáriusnak kell lennie. Mivel y csak két tagban, és azokban is legfeljebb második hatványon fordul elő, teljes négyzetté alakítással (vagy deriválással) könnyen megkaphatjuk a stacionárius pont (ami itt most éppen minimum) helyét:

$$f(y) \equiv \frac{(T_y - y)^2}{2t} + \frac{(y - Y)^2}{2H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{H}\right)(y - y_0)^2 + f_{\min}, \tag{6}$$

ahol a minimum helye:

$$y_0 = \frac{H}{t + H}\,T_y + \frac{t}{t + H}\,Y,$$

értéke pedig

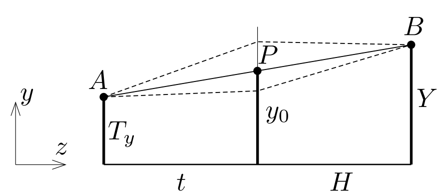
$$f_{\min} = \frac{(Y - T_y)^2}{2(t + H)}. \tag{7}$$

A minimum helyénél teljesül, hogy

$$\frac{T_y - y_0}{t} = \frac{y_0 - Y}{H}.$$

Megjegyzés. Az itt kiszámított minimumhelynek egyszerű, szemléletes jelentése van: a fénysugár „vízszintes nézete” törésmentesen halad át a függőlegesen álló hengerlencsén, éppen úgy, mint egy elhanyagolható vastagságú plánparalel lemezen (*5. ábra*). Ezen út mentén az optikai úthossz (ami most a tényleges úthosszal egyezik meg) adott A és B pontok mellett azon P pontnál minimális, amely az AB egyenesre illeszkedik. A minimum értéke a (*) közelítést alkalmazva:

$$AP + PB = AB \approx t + H + \frac{(Y - T_y)^2}{2(t + H)}.$$



5. ábra

Hasonló módon kapjuk az X-et tartalmazó tagok minimumát:

$$g(X) \equiv \frac{(x - X)^2}{2H} + \frac{(K_x - X)^2}{2k} \geq g_{\min} = \frac{(x - K_x)^2}{2(k + H)}, \tag{8}$$

és a szélsőértéknek megfelelő

$$X_0 = \frac{H}{H + k}\,K_x + \frac{k}{H + k}\,x$$

esetben a fénysugár „függőleges nézete” törésmentesen halad át a vízszintesen elhelyezkedő (jobb oldali) hengerlencsén.

Írjuk be az optikai úthossz (5) kifejezésébe a (7) és (8) összefüggéseknek megfelelő minimális értékeket. Ekkor az optikai úthossz már csak 2 változótól, x-től és Y-tól fog függeni, jóllehet még számos – rögzítettnek gondolt – kifejezést („paramétert”) is tartalmaz:

$$s(x,Y) = s(x,y_0,X_0,Y) = s_0 + \frac{(T_x-x)^2}{2t} + (1-n)\frac{x^2}{2R} + \\ + \frac{(Y-T_y)^2}{2(t+H)} + (1-n)\frac{Y^2}{2R} + \frac{(K_y-Y)^2}{2k} + \frac{(K_x-x)^2}{2(H+k)}. \tag{9}$$

Az optikai úthossz stacionaritásának feltétele szerint a fenti kifejezés – az alkalmazott közelítések mellett – sem x-től, sem Y-tól nem szabad függenie. Ez a követelmény egy sor megszorítást ad a paraméterek között.

Az x-ben és Y-ban lineáris tag együtthatójának eltűnéséből

$$\frac{T_x}{t} + \frac{K_x}{H+k} = 0, \quad \text{illetve} \quad \frac{T_y}{t+H} + \frac{K_y}{k} = 0,$$

vagyis a vízszintes és függőleges irányú nagyítások:

$$N_x = \left|\frac{K_x}{T_x}\right| = \frac{H+k}{t}, \tag{10}$$

illetve

$$N_y = \left|\frac{K_y}{T_y}\right| = \frac{k}{H+t}. \tag{11}$$

A kép lényegében fordított állású, jóllehet ($N_x \neq N_y$ miatt) a (T_x, T_y) és a (K_x, K_y) vektor nem pontosan ellentétes irányú.

A négyzetes tagok együtthatói is nullák (hiszen a különböző fénysugarak optikai úthossza stacionáris, tehát azok egymással is megegyezőek):

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{H+k} = \frac{1}{f} \tag{12}$$

és

$$\frac{1}{t+H} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}, \tag{13}$$

ahol $f = R/(n-1)$. A (12) és (13) egyenletekből $t+k+H=L$ felhasználásával

$$H = \sqrt{L(L-4f)} \quad \text{és} \quad t = k = \frac{L-H}{2}$$

következik. Ezt (10) és (11)-be helyettesítve megkapjuk a különböző irányú nagyításokat:

$$N_x = 1 + \frac{H}{t} \geq 1, \qquad N_y = \frac{1}{N_x} \leq 1.$$

Ha a két hengerlencsét felcseréljük, éppen olyan elrendezést kapunk, mintha az optikai tengely körül 90°-kal elforgattuk volna a lencséket. Ekkor (változatlan t és k mellett) ismét éles képet kapunk az ernyőn, de a nagyítások felcserélődnek: a leképező rendszer x irányban (vízszintesen) fog kicsinyíteni, y irányban (függőlegesen) pedig nagyítani.

Az eredmény – mind a lencsék elhelyezkedése, mind pedig a nagyítások tekintetében – megegyezik az intuitív megoldásban kapottakkal.

Megjegyzés. Az Olvasóban felmerülhet a kérdés, vajon nem jártunk-e el következetlenül, amikor az optikai úthossz (5) képletét, annak stacionaritását vizsgáltuk. Kiválasztottunk $s(x,y,X,Y)$ négy változója közül kettőt (y-t és X-et), és ezen változók szerint *minimumot* kerestünk, majd a minimum értékeket visszahelyettesítettük s-be. Az így kapott (a maradék két változótól függő, a (9) összefüggéssel megadott) $s(x,Y)$-tól megköveteltük, hogy – másodrendig bezárólag – egyik változójától se függjön, vagyis x, x^2, Y és Y^2 együtthatója *mind nulla legyen.* Miért nem voltunk ilyen „szigorúak” az (5) kifejezéssel, miért nem mondtuk, hogy a képalkotáshoz (5) minden változójától független legyen?

Ha (5)-ben (vagy az ezzel egyenértékű (6) kifejezésben) megkövetelnénk, hogy y^2 együtthatója nulla legyen, akkor a teljesíthetetlen

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{H} = 0$$

feltételhez jutnánk. Ez azt mutatja, hogy y (a többi változó és paraméter adott értéke mellett) nem lehet akármekkora, vagyis a képalkotásban *nem minden* y-nak megfelelő fénysugár vesz részt. Ott, ahol $y = y_0$, a (6) kifejezés (y kicsiny változásaira nézve) *stacionárius,* de az egész $f(y)$ – másodrendig bezáróan – *nem állandó*. Fizikailag ez annak felel meg, hogy a fény (adott T_y és Y mellett) csak olyan pályán haladhat, amelynek $y-z$ síkra eső vetülete megtörés nélküli *egyenes,* ahogy azt az 5. ábra mutatja. Ugyanez a helyzet az X változóval is a (8) kifejezésben, ott is csak a minimumot követelhetjük meg, nem pedig a $g(X)$ függvény állandóságát.

Más a helyzet a maradék 2 változóval, x-szel és Y-nal. Ha a paramétereket megfelelően választjuk, akkor elérhetjük, hogy a (9)-ben szereplő kifejezés sem x-től, sem Y-tól ne függjön, vagyis a képalkotásban minden (az optikai tengelyhez közeli) fénysugár részt vegyen. Természetesen a kiszemelt változók kiválasztása önkényes: megtehettük volna azt is, hogy x-ben és Y-ban követelünk meg szélsőértéket, majd ezeket visszahelyettesítve s-be a maradék két változó, vagyis y és X első és második hatványának eltűnését írjuk elő.