

I. rész

1. Hajtsuk végre a következő utasításokat. Egy tetszőleges kétjegyű számnak vegyük a tízszeresét. Az így kapott számhoz adjunk hozzá egy tetszőleges számjegyet. Ennek az összegnek vegyük a százszorosát, majd adjuk hozzá az eredeti kétjegyű számot. Az ekkor kapott számból vegyük el a tetszőleges számjegy kétszeresét. A különbségnek vegyük a hetedét.

Igazoljuk, hogy az eljárás végén mindig egész számot kapunk. (11 pont)

2. Határozzuk meg a p értékét úgy, hogy a következő egyenletnek legyen valós gyöke:

$$\sqrt{x^2 - 2010x - 2011} + \sqrt{x^2 + 2011x + 2010} + \sqrt{x^2 - p^2} = 0.$$

(12 pont)

3. Adott a koordináta-rendszerben öt pont: $A(7; -1)$, $B(-2; 2)$, $C(-1; 5)$, $D(6; 6)$, $E(7; 6)$.

a) Adjuk meg azt a P pontot (ha van ilyen), amelyre $PA = PB = PC = PD$.

b) Igazoljuk, hogy nincs olyan pont, amely az A , B , C és E pontoktól egyenlő távolságra található. (14 pont)

4. Az $f(x)$ másodfokú függvény esetén minden valós x -re teljesül, hogy

$$f(x) + f(x + 1) + 1 = 2 \cdot (f(x) + x + 1).$$

Adjuk meg $f(8) - f(4)$ értékét. (14 pont)

II. rész

5. Egy színpadi díszletet a díszlettervező egy $1 \text{ m} \times 2,5 \text{ m}$ -es préselt lemezből szeretné kivágnak. A lapra 1 dm -es beosztással rácsot rajzolnak, a téglalap hosszú középvonalának egyenesét y , az erre merőleges egyik oldal egyenesét pedig x tengelynek tekintik. Berajzolják az $x \mapsto 25 - x^2$ hozzárendelésű függvény rácspontjait. A rácspontokat összekötő egyenes szakaszok mentén kifűrészelik azt a konvex sokszöget, amelynek egyik oldala az eredeti téglalap egyik oldalával egybeesik. Hány dm^2 -rel kapnának nagyobb területű síkidomot, ha a függvény görbéje mentén tudnának fűrészelni? (16 pont)

6. Az $f(x) = |x - 1| + |x - 5| - 4$ hozzárendeléssel megadott függvény jó közelítéssel egy középszakasz jellegű folyó keresztmetszetét adja. A koordináta-rendszer egysége a valóságban 1 métert jelent. Tudjuk, hogy a folyó sebessége $1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a vízállás pedig 4 méteres.

a) Mekkora mennyiségű víz halad keresztül a folyó keresztmetszetén 1 óra alatt?

b) Hány százalékkal csökken a folyó vízhozama, ha a vízszint 2 méternyi apad?

c) Mennyivel csökken a vízszint az eredetihez képest, ha a híradások szerint a folyó vízhozama a felére esett vissza? (16 pont)

7. A négyzetszámokat háromszög alakzatba rendezzük az alábbiak szerint:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & 4 & 9 & 16 \\ & & & & & & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 \\ & & & & & & 100 & 121 & 144 & 169 & 196 & 225 & 256 \\ & & & & & & & & & & & & & \dots \end{array}$$

a) Melyik szám áll a 13. sor 7. helyén?

b) Hol található a 66 049?

c) Mennyi a 24. sorban lévő számok összege? (16 pont)

8. Hat darab $\sqrt{3}$ és hat darab 4 hosszúságú szakaszt valamilyen sorrendben úgy rakunk egymáshoz, hogy a végén egy hűrtizenkétszög alakuljon ki. Mekkora a tizenkétszög köré írt kör sugara? (16 pont)

9. Egy pihenőpark használatáért az üzemeltető pénzt szeretne kapni, ezért két lehetőséget dolgoztatott ki. Az első változat szerint lenne 12 órás és 6 órás jegy. A 12 órás jeggyel nyitástól zárásig bent lehet lenni 1000 Ft -ért, a 6 órás jegy ára pedig 600 Ft lenne. A második változat szerint lenne 3 órás jegy 350 Ft -ért, 6 órás jegy 600 Ft -ért, 9 órás jegy 850 Ft -ért és az ezt meghaladó időre szóló jegy 1250 Ft -ért. Megfigyeltek 150 látogatót és a következő gyakoriság adódott:

időtartam (h)	0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	11–12
gyakoriság (fő)	6	7	11	18	25	26	20	16	15	4	2	0

- a) Mennyi lesz az adatok alapján az egy főre eső átlagos bevétel az első változat szerint?
- b) Mennyi lesz az adatok alapján az egy főre eső átlagos bevétel a második változat szerint?
- c) Egy harmadik változatban 4, 8 és 12 órás jegyeket lehetne vásárolni, melyek ára arányos lenne az időtartammal. Milyen áron kellene adni ezeket a jegyeket, ha a rendelkezésre álló adatok alapján az egy főre eső átlagos bevételként 700 Ft körüli értéket szeretne kapni az üzemeltető és a jegyek ára 10-zel osztható? (16 pont)