Tegyük fel, hogy már n-szer végrehajtottuk a feladatban leírt eljárást. Legyen ekkor a_n liter bor abban az edényben, amely eredetileg csak bort tartalmazott. Vizsgáljuk meg, hogy a következő át-, majd visszaöntés hogyan változtatja meg ezt a mennyiséget.

A feltételek értelmében az átöntéskor $\frac{a_n}{10}$ liter bor kerül a másik edénybe, ahol már $1-a_n$ liter bor volt, s így most $1-0{,}9\ a_n$ liter lett. A visszaöntéskor ennek $\frac{1}{11}$ része kerül vissza az ottmaradt $0{,}9\ a_n$ liter borhoz, ezért $0{,}9\ a_n+\frac{1-0{,}9\ a_n}{11}$ liter bor lesz az első edényben. Ez nem más, mint a_{n+1}, így

$$a_{n+1}=\frac{9}{11}a_n+\frac{1}{11}. \tag{1}$$

Feladatunk tehát az, hogy ezzel a rekurziós formulával és az $a_0=1$ kezdőtaggal megadott végtelen sorozatnak a határértékét – ha létezik – kiszámítsuk.

Próbáljuk az n-edik tagot zárt alakban felírni. Az (1) formula ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
a_1&=\frac{9}{11}+\frac{1}{11}\\
a_2&=\left(\frac{9}{11}\right)^2+\frac{9}{11}\cdot\frac{1}{11}+\frac{1}{11}\\
a_3&=\left(\frac{9}{11}\right)^3+\left(\frac{9}{11}\right)^2\cdot\frac{1}{11}+\frac{9}{11}\cdot\frac{1}{11}+\frac{1}{11}\\
&\vdots\\
a_n&=\left(\frac{9}{11}\right)^n+\left[\left(\frac{9}{11}\right)^{n-1}+\left(\frac{9}{11}\right)^{n-2}+\ldots+\frac{9}{11}+1\right]\cdot\frac{1}{11}.
\end{aligned}$$

A szögletes zárójelen belül mértani sor áll, melynek összege $\dfrac{1-\left(\frac{9}{11}\right)^n}{1-\frac{9}{11}}$. Ennek alapján $a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{11}\right)^n+\frac{1}{2}$. Ha n minden határon túl növekszik, $\left(\frac{9}{11}\right)^n$ zérushoz tart, így az a_n sorozatnak is létezik határértéke, ami $1/2$. Tehát az első edényben levő bor mennyiségének határértéke fél liter.

Szalay Péter (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. **1.** A feladat megoldásához hozzá tartozott annak a megmutatása, hogy a keresett határérték létezik. Ha ezt már tudnánk, (1) alapján az a_n sorozat a határértéke kielégíti az $a=\frac{9}{11}a+\frac{1}{11}$ összefüggést, azaz $a=1/2$. Így *ha* létezik a határérték, *akkor* az $1/2$. Azt azonban, hogy a határérték létezik, külön bizonyítani kell.

2. A dolgozatok elbírálása a következő szempontok alapján történt. *Helyes:* a kifogástalan dolgozatok. *Hiányos:* Helyes összefüggéseket írnak fel, de a végső következtetést elhamarkodják. a) Elegendőnek tartják a határértékként megadott mennyiségről megállapítani, hogy az alsó korlát. b) Kihasználják a határérték kiszámítása során a határérték létezését, de nem bizonyítják azt. *Hibás:* a) Számolási hiba miatt helytelen eredményt kapnak. b) Dolgozatukból az derül ki, hogy nincsenek tisztában a szükséges matematikai fogalmakkal. **(L. L.)**