A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

1. *Határozzuk meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre az $f\big([x]y\big)=f(x)\big[f(y)\big]$ egyenlőség teljesül minden $x,y\in\mathbb{R}$-re. (Itt $[z]$ a legnagyobb olyan egész számot jelöli, amely kisebb vagy egyenlő z-nél.)*

Mészáros András megoldása. Az azonosan nulla függvény nyilván megoldás. Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor van olyan t, amelyre $f(t)\neq 0$. Ekkor $\big[f(t)\big]$ sem lehet 0, hiszen $\big[f(t)\big]=0$-ból az $x=1$, $y=t$ helyettesítéssel $f\big([1]t\big)=f(1)\big[f(t)\big]=0$ következne, ami ellentmondás.

De ekkor $y=t$ mellett x helyébe a-t, illetve $[a]$-t írva:

$$f\big([a]t\big)=f(a)\big[f(t)\big],\quad \text{illetve}\quad f\big([a]t\big)=f\big([a]\big)\big[f(t)\big].$$

E kettőt kivonva egymásból: $0=\big[f(t)\big]\big(f(a)-f\big([a]\big)\big)$, és ez, mivel $\big[f(t)\big]$ nem 0, azt jelenti, hogy minden a-ra $f(a)=f\big([a]\big)$.

Ha bebizonyítanánk, hogy van olyan c konstans, amelyre $f(n)=c$ minden egész n-re teljesül, akkor a fenti szerint azt kapnánk, hogy f konstans függvény. Ezt mutatjuk meg.

Legyen $x=y=0$, ekkor $f(0)=f(0)\cdot\big[f(0)\big]$, vagyis $0=f(0)\big(1-\big[f(0)\big]\big)$. Ez kétféleképpen lehetséges.

1. eset: $f(0)=0$. Legyen $x=2a$ és $y=\dfrac{1}{2}$, ahol a tetszőleges egész szám. Ekkor

$$f\left([2a]\cdot\frac{1}{2}\right)=f(2a)\cdot\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right],\quad \text{de}\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\left[\frac{1}{2}\right]\right)=f(0)=0,$$

de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\left[\dfrac{1}{2}\right]\right)=f(0)=0$, így $f(a)=0$, minden a egészre; mint fent láttuk ez azt jelenti, hogy f azonosan 0, tehát ebben az esetben nem találtunk új megoldást.

2. eset: $\big[f(0)\big]=1$. Ekkor az $y=0$ helyettesítéssel: $f\big([x]\cdot 0\big)=f(x)\cdot\big[f(0)\big]$, vagyis $f(0)=f(x)$, tehát f konstans: $f(x)=c$, és $[c]=\big[f(0)\big]=1$.

Ezzel beláttuk, hogy f vagy az azonosan nulla függvény, vagy konstans c, ahol $[c]=1$. Könnyen látható, hogy ezek a függvények valóban teljesítik is a feladat feltételét.

2. *Legyen I az ABC háromszög beírt körének középpontja, Γ pedig a háromszög körülírt köre. Az AI egyenes másik metszéspontja a Γ körrel legyen D. Legyen E a $\widehat{BDC}$ körív egy pontja, F pedig a BC szakasz egy pontja, amelyekre teljesül*

$$BAF\sphericalangle=CAE\sphericalangle<\frac{1}{2}BAC\sphericalangle.$$

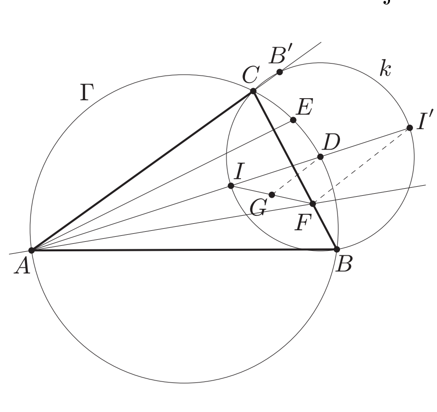
Legyen továbbá G az IF szakasz középpontja. Bizonyítsuk be, hogy a DG és EI egyenesek a Γ körön metszik egymást.

Nagy Donát megoldása. Legyen I tükörképe D-re I', ekkor $ID=DI'$, és így $GD\parallel FI'$, hiszen GD középvonal az IFI' háromszögben. Mivel AD szögfelező az ABC háromszögben, a kerületi szögek tételéből $BD{=}DC$. Felhasználva, hogy BI és CI szögfelező az ABC háromszögben

$$BIC\sphericalangle=180^\circ-ICB\sphericalangle-IBC\sphericalangle=180^\circ-\frac{ACB\sphericalangle}{2}-\frac{ABC\sphericalangle}{2},\quad \text{továbbá}$$

$$BDC\sphericalangle=180^\circ-BAC\sphericalangle=ABC\sphericalangle+ACB\sphericalangle,$$

hiszen $ABCD$ húrnégyszög. A D középpontú $DB=DC$ sugarú körön I rajta van, hiszen $BIC\sphericalangle=180^\circ-\dfrac{BDC\sphericalangle}{2}$, és BC elválasztja D-t és I-t. Az II' nyilván ennek a k körnek az átmérője.



Legyen $FAI\sphericalangle = IAE\sphericalangle = \varphi$ (a két szög a feladat feltétele és $IAB\sphericalangle = IAC\sphericalangle$ miatt egyenlő). A kerületi szögek tétele szerint GD és EI metszéspontja pontosan akkor van Γ-n, ha

$$(\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{IE})\sphericalangle = \varphi = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})\sphericalangle = (\overrightarrow{AI'}, \overrightarrow{AE})\sphericalangle$$

(itt a megfelelő vektorok által bezárt irányított szögek egyenlőségét tekintem). Mivel $\overrightarrow{GD}$ és $\overrightarrow{FI'}$ egyirányúak, ez ekvivalens azzal, hogy

$$(\overrightarrow{AI'}, \overrightarrow{AE})\sphericalangle = \varphi = (\overrightarrow{FI'}, \overrightarrow{IE})\sphericalangle.$$

Tekintsük azt az A középpontú φ szögű nyújtva forgatást, ami F-et I-be viszi. Ez egy φ szöggel való nyújtva forgatás, I' képe az AE egyenesre, AI' képére esik, és a bizonyítandó ekvivalens azzal, hogy FI' képe IE, tehát hogy I' képe E. Az I' képe pontosan akkor E, ha $AF : AI = AI' : AE$, azaz $AE \cdot AF = AI \cdot AI'$.

Mivel $BAF\sphericalangle = EAC\sphericalangle$ és a kerületi szögek tételéből:

$$CEA\sphericalangle = CBA\sphericalangle, \quad ABF \sim AEC, \quad AB : AF = AE : AC, \quad AE \cdot AF = AB \cdot AC.$$

Így az állítás pontosan akkor teljesül, ha $AB \cdot AC = AI \cdot AI'$. Legyen B' a B pont tükörképe AD-re; ekkor $BAD\sphericalangle = DAC\sphericalangle$ miatt B' az AC egyenesen van, $BD = B'D$ miatt B' a k körön van, és $B' = C$ (akkor és) csak akkor teljesül, ha $AB = AC$, de ekkor a kerületi szögek tételéből:

$$ACD\sphericalangle = ACB\sphericalangle + DAB\sphericalangle = ACB\sphericalangle + \frac{180^\circ - 2ACB\sphericalangle}{2} = 90^\circ,$$

így a k kör $B' = C$-ben érinti az AC egyenest. Ezekből következik, hogy A-nak a k-ra vonatkozó hatványa $AI \cdot AI' = AC \cdot AB' = AC \cdot AB$, és ezzel készen vagyunk.

3. *Legyen $\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmaza. Határozzuk meg az összes olyan $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt, amelyre $\big(g(m)+n\big)\big(m+g(n)\big)$ teljes négyzet minden $m, n \in \mathbb{N}$-re.*

Nagy János megoldása. Rögtön látható, hogy a $g(n) = n + c$ alakú függvények megfelelnek a feltételnek, ahol c egy nemnegatív egész szám, hiszen ekkor a függvény értékkészlete megfelelő és

$$\big(g(m)+n\big)\big(m+g(n)\big) = (m+n+c)^2,$$

ami valóban mindig teljes négyzet.

Bebizonyítjuk, hogy csak ezek a jó függvények.

Nézzük meg, hogy egy tetszőleges pozitív egész m-re milyen értéket vehet fel a $g(m+1) - g(m)$ kifejezés. Először igazolom, hogy nem lehet 2-től különböző prímosztója. Indirekt módon tegyük fel, hogy valamilyen $p \neq 2$ prímre $p \mid g(m+1) - g(m)$ és legyen $g(m) = pl + r$, illetve $g(m+1) = pk + r$. Mivel $p > 2$, azért kettőnél több maradékosztály van, tehát létezik biztosan olyan u pozitív egész, hogy sem $(u+l)$, sem $(u+k)$ nem osztható p-vel. Legyen $n = pu - r$.

A feladat feltételéből tudjuk, hogy $\big(g(m)+n\big)\big(m+g(n)\big)$ négyzetszám, tehát $p(l+u)\big(m+g(n)\big)$ négyzetszám. Tudjuk, hogy $(u+l)$ nem osztható p-vel, de p-nek páros kitevőn kell szerepelnie egy négyzetszámban, így $p \mid m + g(n)$.

Ugyanígy kapjuk m helyébe $(m+1)$-et írva, hogy $p \mid m + 1 + g(n)$, ebből $p \mid m + 1 + g(n) - m - g(n) = 1$, ami ellentmondás. Így tehát azt kaptuk, hogy $g(m+1) - g(m)$-nek semmilyen m-re nem lehet 2-től különböző prímosztója.

Most bebizonyítom, hogy $g(m+1) - g(m)$ nem lehet osztható 4-gyel. Tételezzük fel indirekt módon, hogy $4 \mid g(m+1) - g(m)$. Ekkor létezik olyan n pozitív egész szám, hogy $n + g(m)$ és $n + g(m+1)$ is kettő maradékot ad 4-gyel osztva.

Tudjuk, hogy $\big(g(m)+n\big)\big(m+g(n)\big)$ négyzetszám, de $g(m)+n$ osztható 2-vel, de 4-gyel nem, amiből $2 \mid m + g(n)$. Ugyanígy kapjuk m helyébe $(m+1)$-et írva, hogy $2 \mid m + 1 + g(n)$, két szomszédos egész szám mindegyike nem lehet páros, tehát ellentmondásra jutottunk, tehát $4 \mid g(m+1) - g(m)$ nem teljesülhet.

Így arra jutottunk, hogy minden m-re $g(m+1) - g(m)$ lehetséges értékei $1, -1, 2, -2$.

Ezután bebizonyítom, hogy egy adott t értéket, ha $t \neq 1$, akkor csak véges sokszor veheti föl a $g(m+1) - g(m)$ kifejezés. Tételezzük fel, hogy végtelen sok különböző m egész számra $g(m+1) - g(m) = t$. Vegyük észre, hogy

$$\big(g(m+1)+m\big)\big(g(m)+m+1\big) = \big(g(m)+m+t\big)\big(g(m)+m+1\big)$$

négyzetszám. Legyen $v = g(m) + m + 1$, mivel $v > m$, ezért tudjuk, hogy $v \cdot (v + t - 1)$ végtelen sok pozitív egész v-re négyzetszám.

Most két eset van.

1. eset: Ha $t - 1$ páros. Ekkor

$$\left(v + \frac{t-3}{2}\right)^2 < v \cdot (v + t - 1) < \left(v + \frac{t-1}{2}\right)^2,$$

ha v elég nagy, ami ellentmondás, hiszen ekkor $v\cdot(v+t-1)$ nem lehet négyzetszám. A fenti egyenlőtlenség jobb oldala egyértelmű, a bal oldal azt jelenti, hogy

$$v^2+(t-3)v+\left(\frac{t-3}{2}\right)^2<v^2+v(t-1),\quad \left(\frac{t-3}{2}\right)^2<2v,$$

ami teljesül, ha v elég nagy.

2. eset: Ha $t-1$ páratlan. Ekkor

$$\left(v+\frac{t-2}{2}\right)^2<v\cdot(v+t-1)<\left(v+\frac{t}{2}\right)^2,$$

ha v elég nagy, ami ellentmondás, hiszen ekkor $v\cdot(v+t-1)$ nem lehet négyzetszám. A fenti egyenlőtlenség jobb oldala egyértelmű, a bal oldal azt jelenti, hogy

$$v^2+(t-2)v+\left(\frac{t-2}{2}\right)^2<v^2+v(t-1),\quad \left(\frac{t-2}{2}\right)^2<v,$$

ami teljesül, ha v elég nagy.

Azt kaptuk, hogy egy t érték csak véges sokszor szerepelhet különbségként, ha $t\neq 1$. Így tehát a -1, 2, -2 értékek csak véges sokszor szerepelhetnek $g(m+1)-g(m)$ értékeként, vagyis egy korláttól kezdve minden m-re $g(m+1)=g(m)+1$, azaz ha $m>N$, akkor $g(m)=m+c$ valamilyen konstans c-re.

Továbbá bebizonyítjuk, hogy akármilyen N-nél kisebb m egész számra is $g(m)=m+c$. Válasszunk egy olyan $n>N$ számot, amire $m+n+c=p$, ahol p egy prím, ekkor $\big(g(n)+m\big)\big(g(m)+n\big)$ négyzetszám, de $g(n)+m=p$, tehát $g(m)+n$ osztható p-vel, azaz $p\mid g(m)+n-p=g(m)-m-c$. Azt kaptuk, hogy $g(m)-m-c$ osztható végtelen sok elég nagy prímmel, amiből $g(m)=m+c$.

Így tehát minden pozitív egész m-re $g(m)=m+c$, ahol c egy egész szám, de nyilván nemnegatív. Ezek az egyedüli jó megoldások.

4. *Legyen P egy pont az ABC háromszög belsejében. Az AP, BP és CP egyenesek másik metszéspontja az ABC háromszög Γ körülírt körével legyen rendre K, L és M. A Γ körhöz C pontban húzott érintő messe az AB egyenest az S pontban. Tegyük fel, hogy $SC=SP$. Bizonyítsuk be, hogy $MK=ML$.*

Bodor Bertalan megoldása. Legyen $BAC\sphericalangle=\alpha$, $ACB\sphericalangle=\beta$, $CBA\sphericalangle=\gamma$, $BSP\sphericalangle=\varphi$.

Az S pontnak a Γ körre vonatkozó hatványa

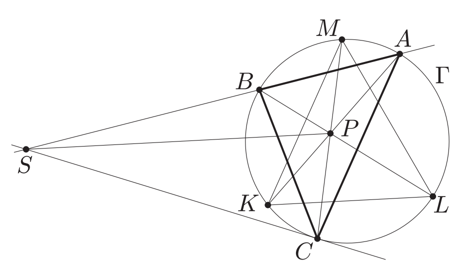
$$SA\cdot SB=SC^2=SP^2.$$

Ebből $\dfrac{SB}{SP}=\dfrac{SP}{SA}$ adódik, ami azt jelenti, hogy az SBP és SPA háromszögek hasonlóak egymáshoz. Ebből $SAP\sphericalangle=SPB\sphericalangle$ következik. Ekkor a kerületi szögek tételéből:

$$\begin{aligned}AKL\sphericalangle&=ABL\sphericalangle=BSP\sphericalangle+SPB\sphericalangle=\varphi+SPB\sphericalangle=\varphi+SAP\sphericalangle=\\&=\varphi+BAK\sphericalangle=\varphi+BLK\sphericalangle,\end{aligned}$$

ahonnan

(1) $$AKL\sphericalangle-BLK\sphericalangle=\varphi.$$



Az érintő szárú kerületi szögek tétele miatt $BCS\sphericalangle=CAB\sphericalangle=\alpha$. Az ACS háromszögben a szögek összege $180^\circ=\alpha+ACS\sphericalangle+CSP\sphericalangle+ASP\sphericalangle=2\alpha+\gamma+\varphi+CSP\sphericalangle$, amiből $CSP\sphericalangle=180^\circ-2\alpha-\gamma-\varphi$. $SC=SP$ miatt az SCP háromszög egyenlő szárú, és akkor

$$SPC\sphericalangle=SCP\sphericalangle=\frac{180^\circ-CSP\sphericalangle}{2}=\alpha+\frac{\gamma+\varphi}{2}.$$

Ebből

$$BCM\sphericalangle = SCP\sphericalangle - BCS\sphericalangle = \frac{\gamma+\varphi}{2} \quad \text{és} \quad ACM\sphericalangle = \frac{\gamma-\varphi}{2}.$$

A kerületi szögek tételéből:

$$BLM\sphericalangle - AKM\sphericalangle = BCM\sphericalangle - ACM\sphericalangle = \frac{\gamma+\varphi}{2} - \frac{\gamma-\varphi}{2} = \varphi. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenlőségek megfelelő oldalait egymásból kivonva

$$AKL\sphericalangle - BLK\sphericalangle - BLM\sphericalangle + AKM\sphericalangle = 0,$$

azaz

$$AKL\sphericalangle + AKM\sphericalangle = BLK\sphericalangle + BLM\sphericalangle \iff MKL\sphericalangle = MLK\sphericalangle \iff MK = ML$$

adódik, és ezt kellett bizonyítanunk.

5. *A B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 dobozok mindegyikében kezdetben egy érme van. Kétféle megengedett lépés van:*

1. típusú lépés: *Választunk egy B_j nemüres dobozt, ahol $1 \le j \le 5$. Elveszünk egy érmét a B_j dobozból, és hozzáadunk két érmét a B_{j+1} dobozhoz.*

2. típusú lépés: *Választunk egy B_k nemüres dobozt, ahol $1 \le k \le 4$. Elveszünk egy érmét a B_k dobozból, és kicseréljük a B_{k+1} (esetleg üres) doboz tartalmát a B_{k+2} (esetleg üres) doboz tartalmával.*

Állapítsuk meg, hogy ilyen lépések valamilyen véges sorozata segítségével elérhető-e, hogy a B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 dobozok mindegyike üres legyen, a B_6 doboz pedig pontosan $2010^{2010^{2010}}$ érmét tartalmazzon. (Definíció szerint $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Dankovics Attila megoldása. Vezessük be a következő jelöléseket.

Kapcsos zárójelbe tett rendezett számhatosok jelölik az állásokat: $\{1;1;1;1;1;1\}$ az alapállás (az első pár üreset elhagyva: $\{0;0;0;1;1;1\} = \{1;1;1\}$).

Zárójelbe tett rendezett számpárok jelölik a lépéseket: például $(1;2)$ azt jelenti, hogy az első dobozból egy 2. típusú lépést hajtottunk végre. Végül jelölje például $n \cdot (k;1)$ azt, hogy a $(k;1)$ lépést n-szer végezzük el.

Legyen $v = 2010^{2010^{2010}}$.

1. Lemma. *Az $\{a;b;c;x;0;0\}$ állásból elérhető az $\{a;b;c;0;2^x;0\}$ állás.*

Bizonyítás. Teljes indukció x szerint: $x = 1$-re $(4;1)$ lépés után elértük az állást.

Indukciós lépés: $\left\{a;b;c;0;2^{x-1};0\right\}$ az indukciós feltevés szerint elérhető. Ez után 2^{x-1}-szer az $(5;1)$, majd a $(4;2)$ lépéseket végrehajtva elértük a kívánt állást.

Hajtsuk végre egymás után a következő lépéseket:

$\{1;1;1;1;1;1\}$-re $(1;1)$; $(2;1)$; $(3;1)$; $(4;1)$; $(5;1)$, az így kapott

$\{0;2;2;2;2;3\}$-re $2 \cdot (5;1)$; $(4;2)$; $7 \cdot (5;1)$; $(3;2)$, majd

$\{0;2;1;14;0;0\}$-re az 1. Lemma szerint létező lépéssorozattal kapott

$\left\{0;2;1;0;2^{14};0\right\}$-re $(3;2)$; $(2;2)$; $(2;1)$; $2 \cdot (3;1)$ adja

$\left\{0;0;2^{14};4;0;0\right\}$-t, amire az 1. Lemma eljárását és (3;2)-t felváltva ismételgetve 2^{14}-szer a $\left\{0;0;0;\underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^2}}}}}}}_{2^{14}+2\text{ db}};0;0\right\}$

álláshoz jutunk.

Legyen a B_4 dobozban lévő érmék aktuális száma mindig h. Megjegyzendő, hogy h paritása tetszőlegesre beállítható (szükség esetén a $(4;2)$ lépés alkalmazásával); ezt később fogom kihasználni.

Az előbbi helyzetből a $3 \cdot \big((4;1); 2 \cdot (5;1)\big)$ átalakítás után a $\{h;0;12\}$ állást kapjuk. Jelölje a B_6-ban lévő érmék számát mindig y (mely jelenleg 3-mal osztható, lévén 12). Legyen végül a B_5-ben lévő érmék száma x.

Ekkor a $(4;2)$; $x \cdot (5;1)$ lépéssorozat y értékét duplázza és h értékét 1-gyel csökkenti (ezután h még pozitív marad, mert $h > v$; továbbá y 3-mal osztható marad; továbbá h paritása tetszőleges marad). Duplázzuk y-t míg $2y \le v < 4y$ teljesül. Legyen az ekkor aktuális y értéke c. A $(4;2)$ lépés után ismételjük az $(5;1)$ lépést addig, amíg $x + 2y = v$ nem teljesül (előbb-utóbb teljesülni fog, mert $x + 2y$ minden lépésben 3-mal nő, így c és $4c$ között minden 3-mal osztható értéket felvesz, és v is ilyen). Ezt követően a $(4;2)$; $x \cdot (5;1)$ lépéssorozat után a $\{h;0;v\}$ állást kapjuk. Ez az állás tetszőleges paritású h-val elérhető, legyen h páros. Ekkor $h \cdot (4;2)$ után az állás: $\{0;0;0;0;0;v\}$, ami megegyezik az elérendő állással.

Tehát a kérdéses állás elérhető.

6. *Legyen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pozitív valós számok egy sorozata. Tegyük fel, hogy van egy olyan s pozitív egész, amellyel*

$$a_n = \max\left\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\right\}$$

teljesül minden $n > s$ egészre. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan ℓ és N pozitív egészek, amikre $\ell \le s$, és $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ minden $n \ge N$-re.

Éles András megoldása. Legyen $m \geq 2$, és $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq s$ tetszőleges m darab pozitív egész, melyek összege n. Ha ezek teljesítenek egy *plusz feltételt,* akkor az

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_m}$$

összeget *n-re képzett összegnek* nevezzük. A plusz feltétel az, hogy az i_j számok közül valamelyik kettő összege nagyobb, mint s (például $i_1 + i_2 > s$, viszont $i_1 + i_1 > s$ még nem elégséges feltétel). Ezt a definíciót és a plusz feltétel eredetét a most következő kulcsfontosságú lemma és annak bizonyítása fogja megmagyarázni.

Lemma. *Az n-re képzett összegek maximuma a_n minden $n > s$ esetén.*

Ezt n-re indukcióval igazoljuk. Ha $k > s$, akkor $n > k$ és az indukciós feltevés értelmében a_k helyébe beírhatunk egy k-ra képzett összeget. Ugyanígy járunk el a_{n-k}-val. Az indexek összege n lesz, a plusz feltétel pedig teljesül, hiszen a_k vagy a_{n-k} felírásából származik két megfelelő indexű tag, ha $k > s$ vagy $n - k > s$ (különben pedig ők maguk a két tag). Tehát a_n felírható egy n-re képzett összegként.

Már csak azt kell igazolni, hogy a_n fölső becslés minden n-re képzett összegre. Feltehető a plusz feltétel miatt, hogy $i_1 + i_2 > s$. Alkalmazva a sorozat képzési szabályát mindig a legelső tagra (amelynek indexe mindenütt nagyobb, mint s):

$$\begin{aligned}a_n = a_{i_1+i_2+\cdots+i_k} &\geq a_{i_1+i_2+\cdots+i_{k-1}} + a_k \geq a_{i_1+\cdots+i_{k-2}} + a_{k-1} + a_k \geq \cdots \geq \\ &\geq a_{i_1+i_2} + a_{i_3} + \cdots + a_k \geq a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k}.\end{aligned}$$

Ezzel a lemmát igazoltuk.

Legyen l olyan pozitív egész, melyre $1 \leq l \leq s$ és ezen belül $\frac{a_l}{l}$ maximális! A megoldás azon észrevételen alapszik, hogy elég nagy n-re felírva a_n-et egy n-re képzett összegként, az a_l-től különböző tagok száma egy bizonyos határ alá szorítható. Ha ugyanis $t \neq l$ és van $l + 2$ darab a_t az összegben, akkor l darab a_t lecserélhető t darab a_l-re, az összeg ekkor nem csökken, hiszen

$$l \cdot a_t = lt \cdot \frac{a_t}{t} \leq lt \cdot \frac{a_l}{l} = t \cdot a_l.$$

Így egy legalább akkora, tehát ismét a_n-nel egyenlő n-re képzett összeget kaptunk. (azért a $+2$ darab a_t, hogy az eltűnő indexből maradjon legalább kettő, így ne sérüljön a *plusz feltétel*). Ezt az eljárást addig végezzük, míg lehet, ily módon a_n már olyan n-re képzett összegként áll majd elő, ahol minden t, $1 \leq t \leq s$, $t \neq l$ esetén a_t az összegben legfeljebb $(l + 1)$-szer szerepel.

Következő választásunk

$$N = (1 + 2 + \ldots + s)(l + 1) + 2l + 1,$$

ugyanis $n \geq N$ esetén a_n fenti felírásában legalább 3 darab a_l lesz jelen, hiszen a többi index összege maximum $N - 2l - 1$. Az egyik a_l-t törölve marad legalább kettő (így a plusz feltétel megint nem sérül), az indexek összege $n - l$ lesz, tehát egy $(n - l)$-re képzett összeg, S_{n-l} marad hátra. De akkor, a lemma és a sorozat képzése alapján

$$a_n = a_l + S_{n-l} \leq a_l + a_{n-l} \leq a_n.$$

Ez végig egyenlőség. Tehát l-nek és N-nek a fenti választásaival $a_n = a_l + a_{n-l}$ minden $n \geq N$ esetén. (A gondolatmenet finomításával N javítható.)