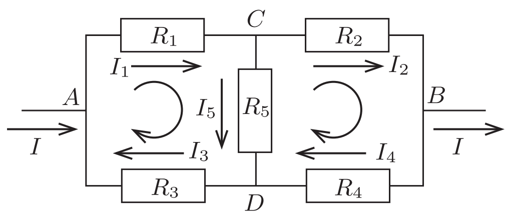
Az öt ellenállásból készített szokványos hídkapcsolás eredő ellenállását többnyire csak a konkrét számértékek ismerete mellett szoktuk meghatározni. Ha azonban vesszük a fáradságot és levezetjük általános jelekkel (paraméterekkel), akkor – megfelelő átalakítások után – egy viszonylag egyszerű képlethez jutunk. Az alábbiakban ezt a számolást végezzük el.[1]

A kapcsolás, a szokásos jelölésekkel, az *1. ábrán* látható. A huroktörvényt és a csomóponti törvényt alkalmazva írunk fel egyenleteket. A két hurok körüljárási irányát a görbe nyilak jelzik. Végcélunk az öt ellenállásból álló egyenáramú áramköri kapcsolás ábrán jelzett A és B pontok közötti R_{AB} eredő ellenállásának meghatározása általános képlettel.



1. ábra

A bal oldali hurokban

$$I_1R_1 + I_5R_5 + I_3R_3 = 0, \tag{1}$$

a jobb oldali hurokban

$$-I_5R_5 + I_2R_2 + I_4R_4 = 0. \tag{2}$$

A C csomópontban

$$I_1 - I_2 - I_5 = 0, \tag{3}$$

a D csomópontban

$$I_5 + I_4 - I_3 = 0, \tag{4}$$

és végül a B csomópontban

$$I_2 - I - I_4 = 0. \tag{5}$$

Az A pontban befolyó és a B pontban kifolyó áram I erősségét mint paramétert kezeljük, így a fenti öt egymástól független egyenlet elegendő az öt ismeretlen áramerősség meghatározásához.

Egy lehetséges lépéssorozat a következő: A (3) és (5) csomóponti egyenletek összeadásával kapjuk, hogy

$$I_1 = I + I_4 + I_5.$$

A D csomóponti egyenletből $I_3 = I_4 + I_5$. Ezeket az első hurokegyenletbe beírva

$$I_1R_1 + I_4R_1 + I_5R_1 + I_4R_3 + I_5R_3 = 0$$

adódik. A második hurokegyenletet a B csomóponti összefüggés alapján $I_2 = I + I_4$ helyettesítéssel átírva ezt kapjuk:

$$-I_5R_5 + IR_2 + I_4R_2 + I_4R_4 = 0.$$

Így most már csak két ismeretlenünk van, két független egyenlettel. Kiemelések után ez a két egyenlet:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_3)I_4 &+ (R_1 + R_3 + R_5)I_5 = -R_1I, \\ (R_2 + R_4)I_4 &\qquad\qquad\qquad - R_5I_5 = -R_2I. \end{aligned}$$

Az egyenletrenszer megoldása:

$$I_4 = -\frac{R_1R_5 + R_2(R_1 + R_3 + R_5)}{(R_1 + R_3)R_5 + (R_2 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5)}\, I,$$

$$I_5 = \frac{R_2(R_1 + R_3) - R_1(R_2 + R_4)}{(R_1 + R_3)R_5 + (R_2 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5)}\, I.$$

[1] A paraméteres képletnek megvan az az előnye, hogy csak egyszer kell kiszámítanunk, a továbbiakban már csak alkalmazzuk. Ugyanígy járunk el pl. a másodfokú egyenlet megoldóképletével is; azt is elegendő egyszer levezetni, utána pedig már akárhányszor alkalmazhatjuk.

Megjegyzés. Itt most érdemes kitérni arra a kérdésre, hogy milyen feltételek mellett lesz I_5 értéke *zérus*. A legutóbbi képlet számlálójából következik, hogy ez akkor áll fenn, ha

$$\frac{R_2}{R_4}=\frac{R_1}{R_3}.$$

Ez az eset a régi időkben használt Wheatstone-híd nevű ellenállásmérő kapcsolás megfelelője. E kapcsolásban R_5 helyén egy érzékeny áramerősség-mérő műszer van, R_1 helyére illesztjük a megmérendő ellenállást, R_2 helyén ismert értékű etalon ellenállás helyezkedik el, és R_3, R_4 egyetlen drótszál azon két részének ellenállása, amelyek a műszer csúsztatható D pontbeli csatlakozásától az A, illetve B pontig tartanak. A műszer D pontbeli csatlakozását ide-oda csúsztatva, megkeressük azt a helyét, amely mellett a műszeren átfolyó I_5 erősségű áram zérus értékű. Ekkor fennáll a fenti aránypár, amiből $R_1=(R_3/R_4)R_2$. Minthogy R_3 és R_4 ugyanazon huzal két darabja, ezért ellenállásuk pontosan hosszúságukkal arányos, tehát ellenállásaik hányadosa is megegyezik hosszúságaik hányadosával. E hosszúságokat pedig egyszerűen mérhetjük. Így az ismeretlen ellenállás értékét könnyen megkapjuk az etalon értékének ismeretében:

$$R_1=\frac{\ell_3}{\ell_4}R_2.$$

Természetesen a fenti képletünk azt is kifejezi, hogy I_5 értéke akkor is zérus, ha az R_5 jelű áthidaló ellenállás értéke „végtelen nagy". A képletben R_5 a nevező mindkét tagjában szerepel, a számlálóban pedig nem, így, ha R_5 végtelen nagy értékhez tart, akkor a tört értéke nullához tart. Ez a gyakorlatban annak felel meg, hogy a C és a D pontokat nem köti össze semmilyen vezető sem. Azt is mondhatnánk, hogy ilyenkor R_5 a két pont közötti levegő vagy egyéb szigetelőanyag végtelenül nagynak tekinthető ellenállása.

Visszatérve a számításokhoz, I_4 és I_5 ismeretében megkapjuk I_3 értékét:

$$I_3=I_4+I_5=\frac{R_2(R_1+R_3)-R_1(R_2+R_4)-R_1R_5-R_2(R_1+R_3+R_5)}{(R_1+R_3)R_5+(R_2+R_4)(R_1+R_3+R_5)}\,I,$$

a B csomópontra felírt Kirchhoff-összefüggésből

$$\begin{aligned}I_2&=I+I_4=\\&=\frac{R_5(R_1+R_3)+(R_2+R_4)(R_1+R_3+R_5)-R_1R_5-R_2(R_1+R_3+R_5)}{(R_1+R_3)R_5+(R_2+R_4)(R_1+R_3+R_5)}\,I,\end{aligned}$$

és végül a C csomópontnál érvényes összefüggésből

$$\begin{aligned}I_1&=I_2+I_5=\\&=\frac{(R_2+R_5)(R_1+R_3)+(R_2+R_4)(R_3+R_5)-R_1R_5-R_2(R_1+R_3+R_5)}{(R_1+R_3)R_5+(R_2+R_4)(R_1+R_3+R_5)}\,I.\end{aligned}$$

Mindezek ismeretében meghatározhatjuk a hídkapcsolásunk A és B pontjai között érvényes ellenállását, mert $R_{AB}=U_{AB}/I$, de U_{AB}-t megkapjuk, ha az A pontból a B pontba vezető *valamelyik* úton összegezzük a feszültségeséseket. A legegyszerűbb út az R_1 és R_2 ellenállásokon keresztül vezet, tehát

$$U_{AB}=I_1R_1+I_1R_2. \tag{6}$$

Így a keresett ellenállásérték:

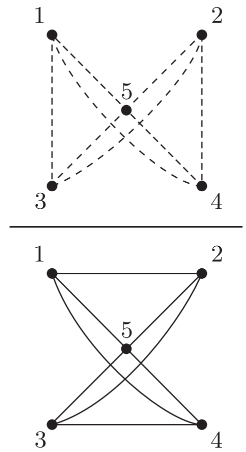
$$\begin{aligned}R_{AB}=&\frac{R_1(R_2+R_5)(R_1+R_3)+R_1(R_2+R_4)(R_3+R_5)-R_1^2R_5}{(R_1+R_3)R_5+(R_2+R_4)(R_1+R_3+R_5)}+\\&+\frac{-R_1R_2(R_1+R_3+R_5)+R_2R_5(R_1+R_3)}{(R_1+R_3)R_5+(R_2+R_4)(R_1+R_3+R_5)}+\\&+\frac{R_2(R_2+R_4)(R_1+R_3+R_5)-R_1R_2R_5-R_2^2(R_1+R_3+R_5)}{(R_1+R_3)R_5+(R_2+R_4)(R_1+R_3+R_5)}.\end{aligned}$$

Ezt tulajdonképpen végeredményünknek tekinthetnénk, de érdemes elvégezni a szorzásokat és összevonásokat mind a számlálókban, mind a nevezőkben és egyetlen törtben foglalni össze az eredményt:

$$R_{AB}=\frac{R_1R_2R_3+R_1R_2R_4+R_1R_3R_4+R_1R_3R_5+R_1R_4R_5+R_2R_3R_4+R_2R_3R_5+R_2R_4R_5}{R_1R_2+R_1R_4+R_1R_5+R_2R_3+R_2R_5+R_3R_4+R_3R_5+R_4R_5}. \tag{$*$}$$

Képletünk, monoton egyszerűsége miatt, arra is alkalmas, hogy programozható zsebkalkulátorunkba egyszerű programlépésekkel beírjuk; de még a fejben való megjegyzése sem nagyon kényelmetlen. Ez utóbbit segítheti, ha a $(*)$ képlet számlálójának is és a nevezőjének is egy-egy gráfot feleltetünk meg. A gráf csúcspontjait számozzuk meg az ellenállások indexeinek megfelelő számokkal. A nevezőben *szereplő* szorzatok indexpárjainak megfelelő csúcspontokat kössük össze egy-egy *folytonos* vonallal, egy másik gráfon pedig *szaggatott* vonallal azokat a csúcspontokat kössük össze, amelynek megfelelő indexű ellenállások *nem szerepelnek* a *számláló* háromtényezős szorzataiban (*2. ábra*).

$R_{AB} =$



2. ábra

A rajz jól mutatja a hídkapcsolás azon szimmetriáját, hogy R_{AB} nem változik meg, ha az elrendezést akár a „függőleges”, akár a „vízszintes” szimmetriatengelyére tükrözzük, vagyis végrehajtjuk az

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \qquad \text{és} \qquad R_3 \leftrightarrow R_4, \tag{7}$$

vagy az

$$R_1 \leftrightarrow R_3 \qquad \text{és} \qquad R_2 \leftrightarrow R_4 \tag{8}$$

felcseréléseket.

R_{AB} levezetett képletének ellenőrzésére (ami egy ilyen hosszú számolás után mindenképpen célszerű) számos lehetőség kínálkozik. Nézzük meg, mekkora az eredő ellenállás, ha a hidat képező R_5 ellenállás értéke zérus, ami egyszerűen azt jelenti, hogy a C és D pontokat egyesítettük (rövidre zártuk). Ekkor R_1 és R_3 párhuzamos kapcsolásban van, hasonlóan az R_2 és R_4 ellenállás is, és a két ellenálláspár sorba van kapcsolva. A könnyen megkapható eredő tehát

$$R_{AB} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}.$$

Ha a $(*)$ végképletünkbe is $R_5 = 0$ értéket helyettesítünk, ugyanezt az eredményt kapjuk.

Második ellenőrzésként tekintsük azt az esetet, ha nincsen a kapcsolásban hidat képező R_5 jelű ellenállás, tehát nem is kapcsoltuk össze a C és D pontokat. Ilyenkor R_1 és R_2 közvetlenül sorosan vannak kapcsolva, hasonlóan R_3 és R_4 is, majd a belőlük alkotott két ellenállás van párhuzamosan kapcsolva A és B pontok közé. Ebben az esetben is könnyen kiszámítható az eredőjük:

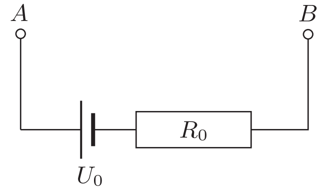
$$R_{AB} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2) + (R_3 + R_4)} = \frac{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

Ha végképletünkkel ezt az esetet is ellenőrizni kívánjuk, akkor a hiányzó hidat végtelen nagy ellenállásnak kell gondolnunk, azaz keresnünk kell, hogy mely értékhez tart R_{AB}, ha benne R_5 tart a végtelenhez. Ha a $(*)$ képletünkben mind a számlálót, mind a nevezőt osztjuk R_5-tel, majd vesszük a tört határértékét, akkor ezt kapjuk:

$$\lim_{R_5 \to \infty} = \frac{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4},$$

tehát a képletünk ebben az esetben is megállta helyét.

Ha a hídkapcsolás R_{AB} eredő ellenállásának meghatározása után az egyes elemeiben folyó áram erősségét akarjuk meghatározni abban az esetben, amikor az $A - B$ pontokban csatlakoztatunk hozzá egy U_0 üresjárási feszültségű és R_0 belső ellenállású áramforrást (*3. ábra*), akkor a következőket kell tennünk.



3. ábra

Meg kell határoznunk az U_{AB} feszültséget. Minthogy R_{AB}-t már kiszámítottuk a $(*)$ képletünkkel, írhatjuk, hogy

$$U_{AB} = U_0 - IR_0, \qquad \text{ahol} \qquad I = \frac{U_{AB}}{R_{AB}},$$

amiből

$$U_{AB} = \frac{R_{AB}}{R_0 + R_{AB}} U_0. \tag{9}$$

A kapcsolás ellenállásain folyó áramokra (amelyeket az 1. ábrán jelölt, feltételezett irányokban tekintjük pozitívnak) fennállnak az (1)–(5) egyenlőségek, továbbá (6) és (9), valamint $U_{AB} = IR_{AB}$, ahol R_{AB} a $(*)$ képlettel megadott kifejezés. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása pl. az R_2 és az R_5 ellenállásokon átfolyó áram erősségére:

$$I_2 = \frac{(R_5 R_{AB} - R_1 R_4) U_0}{\big[(R_1 + R_2) R_5 + (R_2 + R_4) R_1\big](R_0 + R_{AB})}, \tag{10}$$

$$I_5 = \frac{\big[(R_2 + R_4) R_{AB} - (R_1 + R_2) R_4\big] U_0}{\big[(R_1 + R_2) R_5 + (R_2 + R_4) R_1\big](R_0 + R_{AB})}. \tag{11}$$

Ezekből a többi áramerősség is kiszámolható, hiszen $I_1 = I_2 + I_5$, $I_3 = I_1 - I$, $I_4 = I_3 - I_5$.

Megjegyzés. Az I_1, I_3 és I_4 áramerősségeket a (10) képlet alapján is kiszámíthatjuk, ha alkalmazzuk a (7) vagy (8), esetleg mindkettő átnevezés lehetőségét. Ezzel a transzformációval elérhetjük, hogy az R_1, R_3 és R_4 ellenállások *bármelyike* a kapcsolás jobb felső (eredetileg R_2-vel jelzett) ellenállásának helyére kerüljön, és ezután már alkalmazhatjuk a (10) képletet. Vigyázat: a (7) transzformáció során I_5 kivételével valamennyi áram előjele megváltozik.

Az I_5 áramerősségre, vagyis a hidat képező R_5 ellenálláson folyó áram erősségére vonatkozólag ismét felvethetjük a már előzőleg említett, kiegyensúlyozott Wheatstone-híd esetét, amelynél fennáll, hogy $R_1/R_2 = R_3/R_4$. Ekkor, természetesen

$$R_{AB} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}, \tag{12}$$

vagyis R_5-nek nincsen szerepe a hídkapcsolás eredőjében, nullának vagy akár végtelen nagynak tekinthető.

Ellenőrizzük, hogy a (11) képletünk ez esetben valóban zérus áramerősségértéket ad-e. A választ a képlet számlálójában a szögletes zárójelben lévő kifejezés, annak várható eltűnése adja meg. Ebbe beírva R_{AB} (12)-beli értékét, ezt kapjuk:

$$(R_2 + R_4) R_{AB} - (R_1 + R_2) R_4 = \frac{(R_2 + R_4)(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} - (R_1 + R_2) R_4.$$

Elvégezve a közös nevezőre hozást, a szorzásokat, összevonásokat, az új tört számlálójának ezt kapjuk:

$$R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_4^2 - R_1^2 R_4 - R_1 R_2 R_4 - R_2 R_4^2 = R_1 (R_2 R_3 - R_1 R_4) = 0.$$

Az utolsó lépésnél figyelembe vettük, hogy $R_1/R_2 = R_3/R_4$. Látjuk, hogy (11) számlálója zérus, tehát valóban igaz, hogy $I_5 = 0$.